



Imagerie microonde d'objets enterrés : modélisations numériques bidimensionnelles et étude de l'extension tridimensionnelle

Ioannis Aliferis

► To cite this version:

Ioannis Aliferis. Imagerie microonde d'objets enterrés : modélisations numériques bidimensionnelles et étude de l'extension tridimensionnelle. Autre. Université Nice Sophia Antipolis; National Technical University of Athens, 2002. Français. NNT : . tel-00165785v2

HAL Id: tel-00165785

<https://theses.hal.science/tel-00165785v2>

Submitted on 18 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας
και Τεχνολογίας Υλικών

Μικροκυματική απεικόνιση
αντικειμένων στο εσωτερικό δομών:
δισδιάστατη αριθμητική μοντελοποίηση και
μελέτη επέκτασης στις τρεις διαστάσεις

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
Ιωάννη ΑΛΙΦΕΡΗ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2002

Μικροκυματική απεικόνιση
αντικειμένων στο εσωτερικό δομών:
δισδιάστατη αριθμητική μοντελοποίηση και
μελέτη επέκτασης στις τρεις διαστάσεις

Ιωάννης ΑΛΙΦΕΡΗΣ

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε με το σύστημα παρασκευής εγγράφων L^AT_EX. Η σχεδίαση τής σελίδας έγινε από το συγγραφέα: ο προσεκτικός αναγνώστης θα ανακαλύψει τη χρυσή τομή ϕ στις διάφορες αναλογίες (οδηγίες εκτύπωσης βρίσκονται στην τελευταία σελίδα).

Η ηλεκτρονική έκδοση είναι διαθέσιμη στη σελίδα:
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00165785/fr/>

Η εκπόνηση τής διατριβής χρηματοδοτήθηκε με
υποτροφία τού Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

ΑΙΩΝ ΕΣΤΙ τὸ χέρι ποὺ ἐπιστρέφει
ἀπὸ φόνο φριχτὸν καὶ τώρα ξέρει
ποιοῦς ἀλήθεια ὁ κόσμος ποὺ ὑπερέχει
ποιοὶ τὸ «νῦν» καὶ ποιοὶ τὸ «αἰέν» τοῦ κόσμου:

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε υπό καθεστώς συνεπίβλεψης, στον Τομέα Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας και Τεχνολογίας Υλικών, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (ΕΜΠ), στην Ελλάδα, και στο Laboratoire d'Électronique, Antennes et Télécommunications (LEAT), το οποίο ανήκει από κοινού στο Université de Nice – Sophia Antipolis (UNSA) και στο Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), στη Γαλλία.

Η παραπάνω φαινομενικά απλή φράση, κρύβει έναν εξαιρετικά μεγάλο βαθμό πολυπλοκότητας, αγγίζοντας τα όρια του (χβαντικού) Χάους.¹ Κι αν τούτη τη στιγμή γράφω αυτό το σημείωμα, το χρωστώ και στη συνεισφορά κάποιων προσώπων που με στήριξαν – με τον έναν ή άλλο τρόπο – στην πορεία αυτής τής εργασίας.

Εκφράζω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη στους επιβλέποντες καθηγητές μου, κ. Παναγιώτη ΦΡΑΓΚΟ, Καθηγητή ΕΜΠ, και κ. Christian PICHOT, Διευθυντή Έρευνας CNRS και Διευθυντή του LEAT. Μού έδειξαν, ο καθένας από την πλευρά του, αμέριστη συμπαράσταση και εμπιστοσύνη κατά την εκπόνηση τής διατριβής, καθοδηγώντας την εργασία μου με υποδειγματικό τρόπο. Ήταν διαθέσιμοι οποτεδήποτε ζήτησα τη βοήθειά τους, προσφέροντας αποτελεσματικές λύσεις. Οι πολύωρες συζητήσεις μαζί τους μού πρόσφεραν πάντα μία φρέσκια ματιά στο αντικείμενό μου και ένα κίνητρο για να συνεχίσω.

Ευχαριστώ τον κ. Νικόλαο ΟΥΖΟΥΝΟΓΛΟΥ, Καθηγητή ΕΜΠ, για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή, την υποστήριξή του στην ιδέα τής συνεπίβλεψης, τις εξαιρετικά χρήσιμες για την εργασία ιδέες του, και την αποδοχή του να οριστεί ως κριτής τής διατριβής από το UNSA.

Εκφράζω τις βαθιές ευχαριστίες μου στον κ. Albert PAPIERNIK, Καθηγητή UNSA, ο οποίος με υποδέχτηκε ως Διευθυντής του LEAT, αρχικά ως μεταπτυχιακό σπουδαστή και στη συνέχεια ως υποψήφιο διδάκτορα. Τον ευχαριστώ θερμά για τη συμμετοχή του στην επταμελή επιτροπή.

¹ Η έρευνα απέδειξε ότι ο πλήρης ορισμός τής έννοιας «διδακτορική διατριβή υπό καθεστώς συνεπίβλεψης» είναι εξαιρετικά δύσκολο να δοθεί. Σύμφωνα με μια εμπειρική προσέγγιση, πρόκειται για ένα χβαντικό φαινόμενο μεγάλης κλίμακας, στο οποίο ένα φυσικό πρόσωπο βρίσκεται ταυτόχρονα σε δύο μέρη για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την κατάσταση, ένα άτομο συσσωρεύει εμπειρία δεκάδων ωρών πτήσης (με τα αντίστοιχα χαμόγελα αεροσυνοδών· όχι όμως και αρκετά μίλια για ένα ταξίδι στα Bora Bora), ενισχύει αποφασιστικά την παγκόσμια αγορά τηλεπικοινωνιών, παρενοχλεί τους υπεύθυνους δικτύων με τα πιο απίθανα τεχνικά προβλήματα (συμβάλλοντας, υποθέτω, στην προώθηση τής αντίστοιχης έρευνας), εντρυφεί στο Συγκριτικό Δίκαιο, προσπαθώντας να εναρμονιστεί ταυτόχρονα με νόμους διαφορετικών χωρών, και υποβάλλει πρωτόγνωρα αιτήματα σε δημόσιες υπηρεσίες, αποκτώντας αναγκαστικά μια στάση ζεν ως προς τον έξω κόσμο (αν και δεν μπορώ να πω το ίδιο και για την τέχνη συντήρησης τής μοτοσυκλέτας). Ο κατάλογος θα μπορούσε να συνεχιστεί για πολύ, αλλά θα μείνω σε ένα σημείο: όσο κι αν φαίνεται παράδοξο, η πιθανότητα όλα τα παραπάνω να έχουν αίσιο τέλος, είναι μη μηδενική.

Ο κ. Βασίλειος ΜΑΚΙΟΣ, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας, Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Ontario, δέχτηκε να συμμετέχει στην επταμελή επιτροπή και να είναι κριτής τής διατριβής για το Université de Nice – Sophia Antipolis. Τον ευχαριστώ θερμά για όλα, και ιδιαίτερα για το συντονισμό τής διαδικασίας εξέτασης τού διδακτορικού από τη θέση τού προέδρου τής επιτροπής.

Κατά τη διάρκεια όλων αυτών των ετών, είχα την τύχη να συνεργαστώ πολύ στενά με τον κ. Jean-Yves DAUVIGNAC, Λέκτορα UNSA. Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου για την απεριόριστη βοήθεια που μού παρείχε σε θεωρητικά και τεχνικά ζητήματα, τα αριθμητικά αποτελέσματα τού λογισμικού SR3D, τις ατέλειωτες ώρες που αφιέρωσε στην εργασία μου, και τις εξαιρετικά εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε μαζί.

Ευχαριστώ την κα Κωνσταντίνα ΝΙΚΗΤΑ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΕΜΠ, για τη συμμετοχή της στην επταμελή επιτροπή εξέτασης τού διδακτορικού και τις πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις της.

Ο κ. Dominique LESSELIER, Διευθυντής Έρευνας CNRS, δέχτηκε να ορίσει κριτής τής διατριβής. Τον ευχαριστώ γι' αυτό καθώς και για τα εξαιρετικά ενδιαφέροντα σχόλιά του.

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον κ. Ιωάννη ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟ, Καθηγητή ΕΜΠ, για την παραχώρηση ενός χώρου εργασίας στο ΕΜΠ.

Ευχαριστώ τον κ. Γιώργο ΚΟΣΣΙΑΒΑ, Καθηγητή UNSA, την κα Claire MIGLIACCIO, Λέκτορα UNSA, καθώς και όλα τα μέλη τού LEAT, για τη βοήθειά τους.

Ο κ. John GILBERT, ερευνητής στο Xerox Palo Alto Research Center, μού έδωσε υλοποίηση τού αλγορίθμου “Incomplete Lower Upper factorization with Threshold” (ILUT) σε κώδικα MATLAB, κατά τη διάρκεια τού σεμιναρίου “Sparse Days” στο CERFACS (Ιούνιος 2002, Toulouse, Γαλλία)· τον ευχαριστώ γι' αυτό.

Η εκπόνηση τής διατριβής χρηματοδοτήθηκε με υπότροφία τού Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ). Ευχαριστώ τον κ. Επαμεινώνδα ΚΡΙΕΖΗ, Ομότιμο Καθηγητή Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για τα σχόλιά του από τη θέση τού επόπτη καθηγητή. Επίσης ευχαριστώ το προσωπικό τού Ιδρύματος, και ιδιαίτερα τις κυρίες Αρετή ΚΑΛΟΓΕΡΟΠΟΥΛΟΥ, Κρυσταλλία ΚΟΥΚΟΥΛΟΜΑΤΗ, Ιωάννα ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ και Χρυσάννα ΜΕΤΑΞΑ. Η άψογη συνεργασία μου με το ΙΚΥ κατά το διάστημα αυτών των ετών, μού επιτρέπει να το θεωρώ υπόδειγμα δημόσιου οργανισμού σε ό,τι αφορά την ευελιξία, την κατανόηση και την ποιότητα τού προσωπικού του.

Ο Olivier BENEVELLO, διαχειριστής δικτύου στο γαλλικό εργαστήριο, μού παρείχε πολύτιμη και αδιάλλειπτη τεχνική υποστήριξη, ακόμα και εξ' αποστάσεως. Τον ευχαριστώ θερμά.

Ευχαριστώ την κα Géraldine MANSUETI, τον κ. Christian RAFFAELE, την κα Martine BORRO και την κα Βέρα ΕΥΘΥΜΙΟΥ για τη γραμματειακή υποστήριξη.

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου προς όλους τους συναδέλφους, σε Ελλάδα και Γαλλία, και ιδιαίτερα στους Πρόδρομο ΑΤΛΑΜΑΖΟΓΛΟΥ, Αλέξανδρο ΔΗΜΟΥ, Tareq AL GIZAWI, Θεοφάνη ΜΑΝΙΑΤΗ, Θανάση ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟ, Χρήστο ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟ, Θανάση ΠΟΤΣΗ, και Cédric DOURTHE, Ralph FERRAYÉ, Erwan GUILLANTON, Emmanuel LE BRUSQ, Philippe LE THUC, Hervé TOSI, Christelle NANNINI, Chu SON.

Η Joanna SOSABOWSKA υπήρξε ο σύνδεσμός μου με τον εξωτερικό κόσμο κατά τη διάρκεια των τριών τελευταίων μηνών και γι' αυτό τής είμαι ευγνώμων.

Ευχαριστώ το Massimiliano MAÏNI και τη Victorița DOLEAN για τη βοήθεια και τη φιλοξενία τους. . .

. . . και το Νίκο ΧΡΥΣΑΝΘΑΚΟΠΟΥΛΟ, γενικώς.

Γράφοντας αυτό το κείμενο, συνειδητοποιώ για άλλη μια φορά ότι – σε μαθηματική διάλεκτο – η γλώσσα αποτελεί *μη πλήρη βάση* για την περιγραφή των συναισθημάτων. Γι' αυτό, επιλέγω να μην τη χρησιμοποιήσω άλλο. Κάποιοι, των οποίων τα ονόματα λείπουν, θα το καταλάβουν.² Ανάμεσά τους, οι γονείς μου, Δημήτρης και Άννα, η αδερφή μου, Πολυτίμη, ο Γιώργος ΚΟΥΡΗΣ, και τα ανίψια μου, Δανάη και Πλάτωνας.

Νίκαια, Γαλλία
Δεκέμβριος 2002

²— Από μόνοι τους;

— Από μόνοι τους.

— Χωρίς να κάνεις τίποτα;

— Απολύτως τίποτα.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μικροκυματική απεικόνιση	1
1.1.1	Γενική περιγραφή	1
1.1.2	Περιθλαστική τομογραφία	3
1.1.3	Πέρα από την περιθλαστική τομογραφία	5
1.1.4	Μη γραμμικές μέθοδοι	6
1.1.5	Κανονικοποίηση	8
1.2	Δομή διδακτορικής διατριβής	8
I	Δισδιάστατη αριθμητική μοντελοποίηση	11
2	Μικροκυματική τομογραφία	13
2.1	Ευθύ πρόβλημα σκέδασης	13
2.1.1	Ορισμός	13
2.1.2	Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις	14
2.1.3	Μέθοδος Ροπών	16
2.1.4	Εξισώσεις πινάκων	18
2.2	Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης	20
2.2.1	Ορισμός	20
2.2.2	Μέθοδος συζυγών κλίσεων	21
2.2.3	Μέθοδος δισυζυγών κλίσεων	23
2.2.4	Κανονικοποίηση	24
3	Αριθμητικά αποτελέσματα	29
3.1	Εισαγωγή	29
3.2	Μοντελοποίηση προσπίπτοντος πεδίου	32
3.3	Μοντελοποίηση μετρητικού θορύβου	33
3.4	Μελέτη ανοχής θορύβου	34
3.5	Μελέτη γραμμής μέτρησης	35

3.6	Μελέτη αριθμού συχνοτήτων	38
3.7	Μελέτη περιοχής συχνοτήτων	38
3.8	Τεχνικές μεταλλαγής συχνότητας	52
3.9	Συμπεράσματα	55
II	Μελέτη επέκτασης στις τρεις διαστάσεις	61
4	Ευθύ πρόβλημα	63
4.1	Εξισώσεις Maxwell	63
4.2	Οριακές συνθήκες	65
4.3	Συνθήκη ακτινοβολίας	66
4.4	Εξισώσεις σκεδαζόμενου πεδίου	66
5	Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών	71
5.1	Από το συνεχές στο διακριτό	71
5.2	Αρίθμηση τιμών διακριτοποιημένων μεγεθών	75
5.2.1	Τρισδιάστατα προβλήματα	75
5.2.2	Δισδιάστατα προβλήματα	76
5.3	Κατάστρωση γραμμικού συστήματος	77
5.3.1	Προβλήματα κλειστής γεωμετρίας και ακτινοβολίας	79
5.3.2	Προβλήματα σκέδασης	79
5.4	Εφαρμογή οριακών συνθηκών	80
5.5	Απορροφητικές οριακές συνθήκες	82
5.5.1	Ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες	84
5.5.2	Χαρακτηριστικά διάδοσης	84
5.5.3	Θεωρητικός συντελεστής ανάκλασης	86
5.5.4	Προφίλ αγωγιμότητας	86
5.6	Μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο	88
5.6.1	Ολοκλήρωμα Kirchhoff	89
5.6.2	Αριθμητική πιστοποίηση	90
6	Αριθμητικά αποτελέσματα	97
6.1	Κλειστά προβλήματα	97
6.1.1	Μέθοδοι επίλυσης	97
6.1.2	Κυματοδηγός	98
6.1.3	Συντονιζόμενη κοιλότητα	100
6.2	Ανοιχτά προβλήματα	103
6.2.1	Μέθοδοι επίλυσης	103
6.2.2	Στοιχειώδεις δίπολο	105
6.3	Συμπεράσματα	105

7	Συμπεράσματα	107
III	Παραρτήματα	115
A'	Τελεστής ανάδελτα σε πίνακες	117
A'.1	Κλίση πίνακα	117
A'.2	Λαπλασιανή πίνακα	117
B'	Διακριτοποίηση διαφορικών τελεστών	119
Γ'	Διακριτοποίηση εξισώσεων Maxwell	121
Γ'.1	Εξίσωση Faraday	121
Γ'.2	Εξίσωση Maxwell-Ampère	123
Γ'.3	Κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο	125
Γ'.4	Εξίσωση Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο	128
Γ'.5	Κλίση τής εξίσωσης Gauss	130
Δ'	Κατάσρωση γραμμικού συστήματος	135
Δ'.1	Ορισμός πινάκων μέσης τιμής	135
Δ'.2	Εξίσωση Faraday	138
Δ'.3	Εξίσωση Maxwell-Ampère	140
Δ'.4	Κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο	141
Δ'.5	Κλίση τής εξίσωσης Gauss	141
Ε'	Πίνακες περιορισμένης ταυτότητας	145
Ε'.1	Ορισμός και ιδιότητες	145
Ε'.2	Πίνακας εξωτερικού αγωγού	147
Ε'.3	Πίνακας εσωτερικών αγωγών	148
Ε'.4	Πίνακας εφαρμοσμένων δυναμικών	148
ϵ'	Αριθμητική ολοκλήρωση	149
ϵ'.1	Απλή ολοκλήρωση	149
ϵ'.2	Διπλή ολοκλήρωση	150
Z'	Ολοκλήρωμα Kirchhoff	151
	Βιβλιογραφία	155
	Ευρετήριο βιβλιογραφίας	167

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Γεωμετρία πολλαπλών στρωμάτων δισδιάστατου προβλήματος. .	15
3.1	Προφίλ διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας πραγματικού αντικειμένου. Οι αριθμοί στους άξονες x, y αναφέρονται σε κυψέλες.	30
3.2	Αποτελέσματα ανακατασκευής με κανονικοποίηση (μ.κ.) και χωρίς (χ.κ.), συναρτήσει τού πηλίκου σήματος προς θόρυβο. Προφίλ για ανακατασκευή με κανονικοποίηση, $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ (πάνω), $\text{SNR} = 90 \text{ dB}$ (κάτω).	36
3.3	Ομάδα αποτελεσμάτων 1. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 7, 11, 13, 21, 31, 61\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1.5 \text{ m}$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $N_M = 13$ (πάνω), $N_M = 21$ (κάτω).	39
3.4	Ομάδα αποτελεσμάτων 1. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 7, 11, 13, 21, 31, 61\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1.5 \text{ m}$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $N_M = 13$ (πάνω), $N_M = 21$ (κάτω).	40
3.5	Ομάδα αποτελεσμάτων 2. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 9, 11, 21, 41\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1 \text{ m}$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $N_M = 21$ (πάνω), $N_M = 41$ (κάτω).	41
3.6	Ομάδα αποτελεσμάτων 2. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 9, 11, 21, 41\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1 \text{ m}$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $N_M = 21$ (πάνω), $N_M = 41$ (κάτω).	42

- 3.7 Ομάδα αποτελεσμάτων 3. Μεταβολή τού αριθμού συχνοτήτων ($N_F \in \{2, 3, 5, 6, 11, 21\}$) για σταθερή περιοχή συχνοτήτων 0.3–1.3 GHz. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_F = 5$ (πάνω), $N_F = 11$ (κάτω). 43
- 3.8 Ομάδα αποτελεσμάτων 3. Μεταβολή τού αριθμού συχνοτήτων ($N_F \in \{2, 3, 5, 6, 11, 21\}$) για σταθερή περιοχή συχνοτήτων 0.3–1.3 GHz. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_F = 5$ (πάνω), $N_F = 11$ (κάτω). 44
- 3.9 Ομάδα αποτελεσμάτων 4. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω). 45
- 3.10 Ομάδα αποτελεσμάτων 4. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω). 46
- 3.11 Ομάδα αποτελεσμάτων 5. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 5$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω). 48
- 3.12 Ομάδα αποτελεσμάτων 5. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 5$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω). 49
- 3.13 Ομάδα αποτελεσμάτων 6. Μεταβολή τής κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_0 = 0.4$ GHz (πάνω), $f_0 = 1.2$ GHz (κάτω). 50
- 3.14 Ομάδα αποτελεσμάτων 6. Μεταβολή τής κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_0 = 0.4$ GHz (πάνω), $f_0 = 1.2$ GHz (κάτω). 51

3.15	Ομάδα αποτελεσμάτων 7. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3 \text{ GHz}$, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $f_{\max} = 0.5 \text{ GHz}$ (πάνω), $f_{\max} = 1.3 \text{ GHz}$ (κάτω).	53
3.16	Ομάδα αποτελεσμάτων 7. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3 \text{ GHz}$, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $f_{\max} = 0.5 \text{ GHz}$ (πάνω), $f_{\max} = 1.3 \text{ GHz}$ (κάτω).	54
3.17	Ομάδα αποτελεσμάτων 8. Μεταβολή τής κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2 \text{ GHz}$, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $f_0 = 0.4 \text{ GHz}$ (πάνω), $f_0 = 1.2 \text{ GHz}$ (κάτω).	56
3.18	Ομάδα αποτελεσμάτων 8. Μεταβολή τής κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2 \text{ GHz}$, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $f_0 = 0.4 \text{ GHz}$ (πάνω), $f_0 = 1.2 \text{ GHz}$ (κάτω).	57
5.1	Στοιχειώδης κυψέλη (i, j, k) τού πλέγματος.	72
5.2	Γωνιακά Τέλεια Προσαρμοσμένα Στρώματα.	85
5.3	Διαχωριστική επιφάνεια Τέλειου Προσαρμοσμένου Στρώματος.	85
5.4	Πολλαπλά Τέλεια Προσαρμοσμένα Στρώματα.	87
5.5	Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο. Υπολογιστικός χώρος: $(23, 23, 23)$ κόμβοι. Επιφάνεια Kirchhoff: από $(2, 2, 2)$ ως $(22, 22, 22)$, μήκος πλευράς 1λ , κεντραρισμένη.	91
5.6	Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσει τού μήκους d τής πλευράς τού κύβου Kirchhoff (επιφάνεια κεντραρισμένη).	92
5.7	Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσει τής θέσης τού κύβου Kirchhoff. Μηδενικό offset αντιστοιχεί σε κεντραρισμένο κύβο. Υπολογιστικός χώρος: $(43, 43, 43)$ κόμβοι. Επιφάνεια Kirchhoff: μήκος πλευράς 20 κυψέλες (1λ)	94
5.8	Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσει των διαστάσεων τής κυψέλης. Επιφάνεια Kirchhoff: μήκος πλευράς 1λ , κεντραρισμένη.	95

5.9	Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο. Διαστάσεις κυψέλης: $\lambda/120$	96
6.1	Συνιστώσα E_y τού ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών TE_{10}^z (πάνω) και TE_{20}^z (κάτω) ενός κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής, με $a/b = 3$. Οι αριθμοί στους άξονες x, y αναφέρονται σε κυψέλες.	101
6.2	Συνιστώσα E_y τού ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών TE_{101}^z (πάνω) και TE_{201}^z (κέντρο), και συνιστώσα E_z τού ρυθμού TM_{110}^z (κάτω) για μια ορθογωνική κοιλότητα, με $a/b = 3$ και $a/c = 2$	104
6.3	Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και αριθμητικού πεδίου πεπερασμένων διαφορών.	106

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Παράμετροι διακριτοποίησης χώρου D_d	31
3.2	Παράμετροι κανονικοποίησης.	31
5.1	Συντεταγμένες πεδιακών συνιστωσών στην κυψέλη (i, j, k) . . .	72
6.1	Λόγος συχνοτήτων $R_{mn} = f_{mn}/f_{10}$ για κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής, με $a/b = 3$	99
6.2	Λόγος συχνοτήτων $R_{mnp} = f_{mnp}/f_{101}$ για ορθογωνική κοιλότητα, με $a/b = 3$ και $a/c = 2$	103

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

ΝΤΝ τὸ ἀγρίμι τῆς μυρτιᾶς Νῦν ἡ κραυγὴ τοῦ Μάη
Αἰέν ἡ ἄκρα συνείδηση Αἰέν ἡ πλησιφάη

1.1 Μικροκυματική απεικόνιση

1.1.1 Γενική περιγραφή

Ο όρος «μικροκυματική απεικόνιση» περιγράφει ένα σύνολο μεθόδων ανακατασκευής των ιδιοτήτων ενός άγνωστου αντικειμένου, χρησιμοποιώντας ως πηγή πληροφορίας την αλληλεπίδραση τού αντικειμένου με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μικροκυματικών συχνοτήτων. Οι ζητούμενες ιδιότητες μπορεί να περιλαμβάνουν τη θέση, το σχήμα, τα ηλεκτρομαγνητικά χαρακτηριστικά (από τα οποία μπορεί να προκύψει η σύσταση), ή ένα συνδυασμό των παραπάνω. Η παρούσα εργασία εξετάζει τη μικροκυματική απεικόνιση μικρής εμβέλειας, όπου η διάταξη εκπομπής και μέτρησης βρίσκεται σε μικρή απόσταση από το υπό μελέτη αντικείμενο.

Τα τελευταία είκοσι χρόνια έχει εκδηλωθεί μεγάλο ενδιαφέρον για μεθόδους απεικόνισης με χρήση μικροκυμάτων. Η μικροκυματική απεικόνιση έχει εφαρμοστεί ως τεχνική μη καταστροφικού ελέγχου σε κτήρια, στην ανίχνευση μεταλλικών ή διηλεκτρικών αντικειμένων, όπως οι νάρκες κατά προσωπικού, καθώς επίσης και στην περιοχή τής βιοϊατρικής, για την απεικόνιση βιολογικών ιστών.

Μπορούμε να ορίσουμε διάφορες κατηγορίες μεθόδων, με βάση μια σειρά κριτηρίων, όπως είναι η γεωμετρία τής μετρητικής διάταξης, το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιείται και το είδος τής πληροφορίας που δίνει η κάθε μέθοδος.

Η δισδιάστατη απεικόνιση – για την οποία χρησιμοποιείται και ο όρος «τομογραφία» – δίνει πληροφορία για μια εγκάρσια τομή τού αντικειμένου, ενώ αν η πληροφορία περιγράφει ολόκληρο το αντικείμενο, πρόκειται για τρισδιάστατη απεικόνιση.

Το αντικείμενο μπορεί να βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο, ή στο εσωτερικό ενός μέσου με γνωστές ιδιότητες, στην περίπτωση τής μικροκυματικής απεικόνισης στο εσωτερικό δομών.

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, με την οποία αλληλεπιδρά το υπό εξέταση αντικείμενο, παράγεται από μία ή περισσότερες κεραίες εκπομπής. Το αποτέλεσμα αυτής τής αλληλεπίδρασης μετριέται από μία ή περισσότερες κεραίες λήψης. Το πλήθος και η γεωμετρική διάταξη των εκπομπών και των δεκτών, αποτελούν επιπλέον χαρακτηριστικά των διαφόρων μεθόδων. Μια διάταξη «πολλαπλής πρόσπτωσης» (*multiview*) χρησιμοποιεί περισσότερους τού ενός εκπομπούς, ή ισοδύναμα έναν εκπομπό που μετακινείται. Ο όρος «πολλαπλής μέτρησης» (*multistatic*) περιγράφει τη μέτρηση τού ανακλώμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από πολλούς δέκτες, ή από ένα δέκτη που μετακινείται. Σε ό,τι αφορά τη μορφή τού προσπίπτοντος κύματος, μπορούμε να διακρίνουμε τις μεθόδους στο πεδίο τού χρόνου και στο πεδίο τής συχνότητας· στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στις τελευταίες.

Το πρόβλημα που καλείται να λύσει μια μέθοδος μικροκυματικής απεικόνισης, είναι ο προσδιορισμός τού άγνωστου αντικειμένου, με βάση τη μέτρηση τού σχεδαζόμενου πεδίου, όταν το προσπίπτον πεδίο είναι γνωστό. Πρόκειται δηλαδή για ένα πρόβλημα αντίστροφης σκέδασης. Το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα είναι η εύρεση τού σχεδαζόμενου πεδίου από ένα γνωστό αντικείμενο, με δεδομένο το προσπίπτον πεδίο. Οι ποιοτικές (*qualitative*) μέθοδοι απεικόνισης δίνουν πληροφορία για την ύπαρξη, τη θέση και το σχήμα τού αντικειμένου, ενώ οι ποσοτικές (*quantitative*) μέθοδοι ανακατασκευάζουν επίσης τις ηλεκτρομαγνητικές του ιδιότητες.

Το πρόβλημα αντίστροφης σκέδασης είναι μη καλώς ορισμένο (*ill-posed*) (Hadamard, 1923, Colton and Kress, 1992), δηλαδή τουλάχιστο μία από τις παρακάτω συνθήκες δεν ικανοποιείται:

1. Ύπαρξη τής λύσης.
2. Μοναδικότητα τής λύσης.
3. Ομαλή εξάρτηση τής λύσης από τα δεδομένα.

Σε μια πρώτη ματιά, η ικανοποίηση τής πρώτης συνθήκης μπορεί να φαίνεται δεδομένη, αφού το αντικείμενο που έδωσε το σχεδαζόμενο πεδίο υπάρχει. Όμως, η μέτρηση τού σχεδαζόμενου πεδίου περιέχει αναπόφευκτα θόρυβο· αν η τρίτη συνθήκη δεν ικανοποιείται, τότε μπορεί τα δεδομένα μαζί με το θόρυβο να μην αντιστοιχούν σε καμμία λύση. Σχετικά με τη δεύτερη συνθήκη, έχει αποδειχτεί ότι η μη μοναδικότητα τής λύσης οφείλεται σε μη ακτινοβολούσες πηγές ρευμάτων (Devaney and Wolf, 1973, Devaney and Sherman, 1982). Πρόκειται για επαγόμενες ρευματικές κατανομές οι οποίες δε δημιουργούν πεδίο στα σημεία όπου γίνεται η μέτρηση (Habashy and Oristaglio, 1994), με

αποτέλεσμα το μετρούμενο σκεδαζόμενο πεδίο να μην περιέχει πληροφορία για την ανασύνθεσή τους. Η τρίτη συνθήκη αναδεικνύει τη σημασία που έχει η ελαχιστοποίηση του μετρητικού θορύβου για την ποιότητα της ανακατασκευής. Επιπλέον, οι μέθοδοι μικροκυματικής απεικόνισης πρέπει να είναι ανθεκτικές στο μετρητικό θόρυβο, καθώς η παρουσία του δεν μπορεί να εξαλειφθεί εντελώς. Σημειώνουμε ότι από τη σκοπιά της θεωρίας πολυπλοκότητας, ένα μη καλώς τοποθετημένο πρόβλημα μπορεί να είναι ακόμα και μη επιλύσιμο (Traub, 1999).

Η συνάρτηση του χώρου που δίνει τις ιδιότητες του αντικειμένου (η «συνάρτηση αντικειμένου») έχει πολύπλοκη, μη γραμμική εξάρτηση από τις τιμές του σκεδαζόμενου πεδίου, οι οποίες αποτελούν τα δεδομένα του προβλήματος. Η μη γραμμικότητα του αντίστροφου προβλήματος οφείλεται στα φαινόμενα πολλαπλών ανακλάσεων του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος (Chew, 1995), τα οποία εκδηλώνονται πιο έντονα στις υψηλές συχνότητες (Chew and Lin, 1995).

1.1.2 Περιθλαστική τομογραφία

Οι πρώτες μέθοδοι μικροκυματικής απεικόνισης παρουσιάστηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 1980, τόσο για αντικείμενα στον ελεύθερο χώρο (Adams and Anderson, 1982) όσο και στο εσωτερικό δομών, με εφαρμογή στη βιοϊατρική (Bolomey et al., 1982, Baribaud et al., 1982). Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούν την περιθλαστική τομογραφία (*diffraction tomography*, DT), μια τεχνική που εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην απεικόνιση υπερήχων (Mueller et al., 1979) ενώ θεωρητικά ήταν γνωστή αρκετά παλαιότερα (Wolf, 1969, Iwata and Nagata, 1975).

Η περιθλαστική τομογραφία μπορεί να θεωρηθεί επέκταση της υπολογιστικής τομογραφίας (*computerized tomography*, CT). Λαμβάνει υπόψη τη μη ευθύγραμμη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, ενώ η υπολογιστική τομογραφία – που χρησιμοποιείται στην απεικόνιση με ακτίνες X – θεωρεί διάδοση σε ευθεία γραμμή. Το ολικό πεδίο στο εσωτερικό του άγνωστου σκεδαστή προσεγγίζεται σύμφωνα με τις υποθέσεις Born ή Rytov. Στη συνέχεια, το θεώρημα προβολικής περίθλασης Fourier (Wolf, 1969, Iwata and Nagata, 1975, Slaney et al., 1984) δίνει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση αντικειμένου και το μετρούμενο σκεδαζόμενο πεδίο.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό – το οποίο είναι η επέκταση του μετασχηματισμού Radon στην περίπτωση της μη ευθύγραμμης διάδοσης – για ένα σώμα στο οποίο προσπίπτει ένα επίπεδο κύμα, ο χωρικός μετασχηματισμός Fourier του σκεδαζόμενου πεδίου, μετρημένο πάνω σε μια ευθεία κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος, συμπίπτει με ένα τόξο κύκλου του δισδιάστατου χωρικού μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης αντικειμένου.

Η χρήση πολλαπλών γωνιών πρόσπτωσης καθώς και διαφορετικών συχνοτήτων έχει ως αποτέλεσμα την ανάκτηση ολόκληρου τού χωρικού φάσματος τής συνάρτησης αντικειμένου, το οποίο, μέσω ενός αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, δίνει τις ιδιότητες τού αντικειμένου.

Η περιθλαστική τομογραφία δίνει αποτελέσματα σχεδόν σε πραγματικό χρόνο, αφού οι βασικοί υπολογισμοί αποτελούνται από γρήγορους μετασχηματισμούς Fourier σε μία και δύο διαστάσεις. Η διακριτική ικανότητα τής μεθόδου ισούται θεωρητικά με $\lambda/2$, όπου λ το μήκος κύματος στο εσωτερικό τού σκεδαστή, αλλά στην πράξη αυτό το όριο δύσκολα επιτυγχάνεται (Paoloni, 1987).

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν περιθλαστική τομογραφία συναντούν δύο περιορισμούς. Ο ένας είναι ότι οι δέκτες πρέπει να ισαπέχουν, και η μεταξύ τους απόσταση να είναι μικρότερη ή ίση από μισό μήκος κύματος. Ο περιορισμός αυτός προέρχεται από το θεώρημα δειγματοληψίας τού Shannon και σχετίζεται με το γεγονός ότι οι δέκτες πρέπει να δειγματοληπτούν με ικανοποιητικό χωρικό ρυθμό το σκεδαζόμενο πεδίο. Ο δεύτερος περιορισμός προέρχεται από τη χρήση των προσεγγίσεων Born ή Rytov για το ολικό πεδίο στο εσωτερικό τού σκεδαστή (Habashy et al., 1993). Για να ισχύει η προσέγγιση Born, το γινόμενο τής διαμέτρου τού σκεδαστή επί το σχετικό δείκτη διάθλασής του πρέπει να είναι μικρότερο από 0.25 λ . Για την προσέγγιση Rytov δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγεθος τού σκεδαστή, αλλά ο δείκτης διάθλασης τού αντικειμένου πρέπει να διαφέρει λιγότερο από 2% από εκείνον τού εξωτερικού μέσου (Slaney et al., 1984). Οι συνθήκες αυτές δείχνουν ότι το πεδίο εφαρμογής τής περιθλαστικής τομογραφίας είναι σχετικά περιορισμένο.

Μία λύση για να αρθεί ο δεύτερος περιορισμός, είναι να μη χρησιμοποιηθεί κάποια προσέγγιση για το πεδίο στο εσωτερικό τού σκεδαστή. Αυτή η τροποποίηση τής περιθλαστικής τομογραφίας δίνει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στα επαγόμενα ρεύματα στο εσωτερικό τού σκεδαστή και στο μετρούμενο σκεδαζόμενο πεδίο (Pichot et al., 1985). Πρόκειται πλέον για μια μέθοδο ποιοτικής απεικόνισης η οποία έχει εφαρμοστεί στη βιοϊατρική και το μη καταστροφικό έλεγχο (Tabbara et al., 1988). Η μέθοδος αυτή δε θέτει περιορισμούς ως προς το μέγεθος και το είδος των σκεδαστών, αλλά μπορεί, σε ορισμένες περιπτώσεις, να οδηγήσει σε *artifacts* (Bolomey and Pichot, 1991).

Το γεγονός ότι η περιθλαστική τομογραφία επιλύει ένα γραμμικό πρόβλημα, υποδηλώνει ότι τα φαινόμενα πολλαπλής ανάκλασης δε λαμβάνονται υπόψη. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τους παραπάνω περιοριστικούς παράγοντες, ώθησε την έρευνα σε πιο σύνθετες μεθόδους μικροκυματικής απεικόνισης. Πάντως, η περιθλαστική τομογραφία βρίσκει εφαρμογή ακόμα και σήμερα σε συστήματα ανίχνευσης αντικειμένων μέσα στη γη (Hansen and Johansen, 2000, Cui and Chew, 2000), όταν η ταχύτητα επεξεργασίας είναι πιο σημαντική από την ακρίβεια τού αποτελέσματος.

1.1.3 Πέρα από την περιθλαστική τομογραφία

Στην προσπάθεια να διευρυνθεί το πεδίο εφαρμογών τής μικροκυματικής απεικόνισης και σε σχεδιαστές για τους οποίους δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις τής περιθλαστικής τομογραφίας, αναπτύχθηκαν πολλές τεχνικές. Κοινό χαρακτηριστικό σχεδόν όλων αυτών των μεθόδων είναι η επαναληπτική επίλυση ενός γραμμικοποιημένου προβλήματος. Οι περισσότερες τεχνικές χρησιμοποιούν τη μέθοδο των ροπών για να περιγράψουν και να διακριτοποιήσουν το ευθύ πρόβλημα σκέδασης (Richmond, 1965).

Οι Wang and Chew (1989) πρότειναν την Επαναληπτική Μέθοδο Born (*Born Iterative Method*, BIM) την οποία στη συνέχεια επέκτειναν στην Παραμορφωμένη Επαναληπτική Μέθοδο Born (*Distorted Born Iterative Method*, DBIM) (Chew and Wang, 1990), δείχνοντας ότι η πρώτη είναι πιο ανθεκτική στο θόρυβο, ενώ η δεύτερη παρουσιάζει γρηγορότερη σύγκλιση.

Μια επαναληπτική τεχνική που χρησιμοποιεί τη μέθοδο Newton-Kantorovich (NK) για δισδιάστατη ποσοτική απεικόνιση στον ελεύθερο χώρο, προτάθηκε από τους Joachimowicz et al. (1991). Το γεγονός ότι το πρόβλημα είναι μη καλώς ορισμένο, αντιμετωπίζεται με τη χρήση κανονικοποίησης τύπου Tikhonov, ενώ στη διαδικασία ανασύνθεσης μπορεί να εισαχθεί οποιαδήποτε a priori πληροφορία σχετικά με το περίγραμμα του αντικειμένου και τις ακρότατες τιμές των ηλεκτρομαγνητικών του παραμέτρων.

Η μέθοδος Newton-Kantorovich (πρόκειται για επέκταση στην περίπτωση των συναρτησιοειδών τής μεθόδου εύρεσης ελαχίστου τού Newton) έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για την εύρεση τού σχήματος δισδιάστατων μεταλλικών σχεδιαστών στον ελεύθερο χώρο (Roger, 1981). Η NK είναι ισοδύναμη με την Επαναληπτική Παραμορφωμένη Μέθοδο Born, όπως και με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt (Franchois and Pichot, 1997).

Έχουν παρουσιαστεί επίσης μη επαναληπτικές μέθοδοι, που χρησιμοποιούν ψευδο-αντίστροφη υπό την έννοια ελάχιστων τετραγώνων, για την επίλυση τού αντίστροφου προβλήματος (Caorsi et al., 1993, 1994).

Σημειώνουμε επίσης την πρόσφατη επέκταση τής περιοχής ισχύος τής προσέγγισης Rytov και τη χρησιμοποίηση αυτής τής τροποποιημένης μεθόδου στην επίλυση τού αντίστροφου προβλήματος με επαναληπτικό τρόπο (Kechribaris, 2001, Kechribaris et al., 2003).

Όλες αυτές οι τεχνικές δίνουν αποτελέσματα ποσοτικής απεικόνισης σε περιπτώσεις σχεδιαστών οι οποίοι βρίσκονται εκτός ορίων ισχύος τής περιθλαστικής τομογραφίας.

1.1.4 Μη γραμμικές μέθοδοι

Οι μη γραμμικές μέθοδοι βασίζονται γενικά σε μια επαναληπτική διαδικασία. Πρόκειται για μεθόδους αντίστροφης σκέδασης, όπου ένα συναρτησιοειδές, το οποίο αποτελεί μέτρο για την καταλληλότητα της λύσης σε κάθε επανάληψη, διατηρεί τον πλήρη μη γραμμικό χαρακτήρα του προβλήματος, χωρίς καμμία προσέγγιση.

Η μέθοδος της Τροποποιημένης Βαθμίδας (*Modified Gradient*, MG) (Kleinman and van den Berg, 1992) θεωρεί ως αγνώστους τόσο τη συνάρτηση αντικειμένου όσο και το ολικό πεδίο στο εσωτερικό αυτού. Το συναρτησιοειδές που κατασκευάζεται με βάση αυτή τη μέθοδο αποτελείται από δύο όρους. Ο πρώτος δείχνει την απόσταση ανάμεσα στο σκεδαζόμενο πεδίο αναφοράς και το σκεδαζόμενο πεδίο από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο της τρέχουσας επανάληψης. Ο δεύτερος όρος δείχνει κατά πόσο το ολικό πεδίο στο εσωτερικό του αντικειμένου, στην τρέχουσα επανάληψη, ικανοποιεί τις εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Με αυτόν τον τρόπο, η MG επιλύει ταυτόχρονα τόσο το ευθύ πρόβλημα σκέδασης, με χρήση της μεθόδου των ροπών, όσο και το αντίστροφο.

Βελτιωμένες εξισώσεις ενημέρωσης των αγνώστων έχουν ως αποτέλεσμα τη διεύρυνση του πεδίου εφαρμογών της, όσων αφορά τις διαστάσεις και το δείκτη διάθλασης του σκεδαστή (Kleinman and van den Berg, 1993). Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί στην εύρεση της θέσης και τού σχήματος μεταλλικών αντικειμένων στον ελεύθερο χώρο (Kleinman and van den Berg, 1994), έχει συνδυαστεί με μέθοδο κανονικοποίησης τύπου «ολικής μεταβολής» (van den Berg and Kleinman, 1995) και έχει χρησιμοποιηθεί για ποιοτική (Souriau et al., 1996) και ποσοτική (Lambert et al., 1998) τομογραφία στο εσωτερικό δομών.

Η μέθοδος τροποποιημένης βαθμίδας δίνει συγκρίσιμα αποτελέσματα με εκείνα της Newton-Kantorovich, αλλά είναι περισσότερο ανθεκτική σε υψηλές στάθμες θορύβου (Belkebir et al., 1997). Αποτελέσματα απεικόνισης μεταλλικών αντικειμένων στον ελεύθερο χώρο με βάση πραγματικά δεδομένα μετρήσεων έχουν επίσης δημοσιευτεί (van den Berg et al., 1995).

Βελτίωση της μεθόδου αποτελεί η χρήση πηγών αντίθεσης στο φορμαλισμό τού προβλήματος (Habashy and Oristaglio, 1994, Bloemenkamp and van den Berg, 2000). Η περιγραφή τού πεδίου στο εσωτερικό τού σκεδαστή με ολικές συναρτήσεις βάσης (επαλληλία επίπεδων κυμάτων) μειώνει κατά πολύ τον αριθμό των αγνώστων και ελαττώνει το υπολογιστικό κόστος (Maniatis, 1998, Maniatis et al., 2000).

Το γεγονός ότι το ευθύ πρόβλημα δεν επιλύεται σε κάθε επανάληψη τού αντίστροφου, δίνει στη μέθοδο τροποποιημένης βαθμίδας το πλεονέκτημα της ταχύτητας. Ταυτόχρονα, όμως, αυτό θέτει κάποιους περιορισμούς ως προς το μέγεθος και το δείκτη διάθλασης των προς ανακατασκευή αντικειμένων (Kleinman and van den Berg, 1993).

Μια άλλη προσέγγιση επιλύει επαναληπτικά το αντίστροφο πρόβλημα, αλλά σε κάθε επανάληψη το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα λύνεται πλήρως (Harada et al., 1995). Το συναρτησιοειδές αυτής τής οικογένειας μεθόδων αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο τού συναρτησιοειδούς τής τροποποιημένης βαθμίδας, αυτόν δηλαδή που αναφέρεται στο σκεδαζόμενο πεδίο. Η ελαχιστοποίησή του γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συζυγών βαθμίδων στη μη γραμμική της μορφή (Nazareth, 1996).

Η παραπάνω τεχνική, σε συνδυασμό με τη μέθοδο των ροπών για την επίλυση τού ευθέος προβλήματος, έχει εφαρμοστεί στη μικροκυματική τομογραφία μεταλλικών αντικειμένων στον ελεύθερο χώρο – με βάση συνθετικά (Lobel et al., 1997a) και πειραματικά (Lobel et al., 1997b) δεδομένα – καθώς και σε διηλεκτρικά αντικείμενα στο εσωτερικό δομών (Dourthe et al., 2000c,b, Aliferis et al., 2000c).

Η χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων, για την επίλυση τού ευθέος προβλήματος, έχει προταθεί για την απεικόνιση δισδιάστατων μεταλλικών (Bonnard et al., 1998) και διηλεκτρικών (Rekanos et al., 1999, Bonnard et al., 2000) αντικειμένων στον ελεύθερο χώρο.

Οι εργασίες που έχουμε αναφέρει ως τώρα, εξετάζουν αποκλειστικά την εγκάρσια μαγνητική πόλωση. Για την περίπτωση τής εγκάρσιας ηλεκτρικής πόλωσης, μπορούμε να αναφέρουμε τις εργασίες των Ma et al. (2000) και Rekanos and Tsiboukis (2000). Αναφέρουμε ακόμα τις μεθόδους ανακατασκευής βασισμένες στα level sets (Dorn et al., 2000, Ito et al., 2001, Ramananjaona et al., 2001, Ferrayé et al., 2003) καθώς και επίσης εκείνες που χρησιμοποιούν γενετικούς αλγόριθμους (Caorsi et al., 2000, Pastorino et al., 2000) και νευρωνικά δίκτυα (Wang and Gong, 2000, Rekanos, 2001) για την ελαχιστοποίηση τού συναρτησιοειδούς.

Ανάμεσα στις εναλλακτικές προσεγγίσεις τού προβλήματος τής μικροκυματικής απεικόνισης, σημειώνουμε εδώ τη μοντελοποίηση τού αντικειμένου με βάση μια παραμετρική μορφή, γεγονός που οδηγεί σε μειωμένο αριθμό αγνώστων αλλά στην ανασύνθεση ενός ισοδύναμου αντικειμένου (Budko and van den Berg, 1999, Miller et al., 2000, Sato et al., 2000), και επίσης τη χρήση τεχνικών επεξεργασίας σήματος (Morris et al., 1995, Sahin and Miller, 2001).

Οι επαναληπτικές μη γραμμικές τεχνικές χρειάζονται τις παραγώγους τού συναρτησιοειδούς ως προς τη συνάρτηση τού άγνωστου αντικειμένου. Οι συναρτησιακές παράγωγοι κατά Fréchet (Céa, 1971) μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή, με βάση τον ορισμό τους, όπως συμβαίνει στην εργασία των Dourthe et al. (2000c). Μπορούν επίσης να υπολογιστούν έμμεσα (Norton, 1999) ή ακόμα και αριθμητικά, με αυτόματη παραγωγή (Coleman et al., 2000). Σε αρκετές τεχνικές απεικόνισης χρησιμοποιείται το προσαρτημένο πρόβλημα για τον έμμεσο υπολογισμό των συναρτησιακών παραγώγων (Roger, 1982, Roger et al., 1986).

1.1.5 Κανονικοποίηση

Οι τεχνικές κανονικοποίησης χρησιμοποιούνται για να αντιμετωπιστεί το γεγονός ότι το πρόβλημα αντίστροφης σκέδασης είναι μη καλώς ορισμένο. Οι τεχνικές αυτές προσθέτουν έναν όρο στο συναρτησιοειδές και οδηγούν την επαναληπτική διαδικασία επίλυσης προς μια λύση με επιθυμητά χαρακτηριστικά. Με αυτόν τον τρόπο, η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αποκαθίσταται. Η κανονικοποίηση εισάγει στον αλγόριθμο *a priori* πληροφορία σχετικά με τη μορφή της λύσης. Για παράδειγμα, μια τέτοια πληροφορία μπορεί να είναι ότι η συνάρτηση αντικειμένου είναι ομαλή, χωρίς ασυνέχειες. Αυτός ο τύπος κανονικοποίησης (Tikhonov and Arsenin, 1977) οδηγεί σε αντικείμενο με ομαλό προφίλ διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας. Η κανονικοποίηση με διατήρηση ασυνεχειών (Lobel et al., 1997a) κατευθύνει τη λύση προς αντικείμενα των οποίων το προφίλ αποτελείται από ομοιογενείς ζώνες, χωρισμένες μεταξύ τους από ασυνέχειες. Η διατήρηση ασυνεχειών περιγράφει τα πραγματικά αντικείμενα καλύτερα από ό,τι η τεχνική Tikhonov (Lobel et al., 1997b).

1.2 Δομή διδακτορικής διατριβής

Η διατριβή αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος, αφιερωμένο στο δισδιάστατο πρόβλημα, ξεκινάει με το δεύτερο κεφάλαιο. Παρουσιάζουμε μια μέθοδο μικροκυματικής τομογραφίας η οποία αναπτύχθηκε στα πλαίσια των εργασιών του Dourthe (1997). Πρόκειται για μια μέθοδο μη γραμμικής τομογραφίας, η οποία χρησιμοποιεί τη μέθοδο των ροπών για την επίλυση του ευθέως προβλήματος σε κάθε επανάληψη. Η μέθοδος είναι πολλαπλής συχνότητας, πολλαπλής πρόσπτωσης και πολλαπλής μέτρησης, με πόλωση εγκάρσια μαγνητική. Περιγράφουμε τη μαθηματική μορφή του ευθέως και του αντίστροφου προβλήματος, καθώς και την τεχνική κανονικοποίησης με διατήρηση ασυνεχειών, η οποία ακολουθείται από μια συζήτηση σχετικά με τον τρόπο λειτουργίας της. Το τρίτο κεφάλαιο αρχίζει με τις βελτιώσεις που κάναμε στη μέθοδο απεικόνισης του δεύτερου κεφαλαίου: τη μοντελοποίηση του προσπίπτοντος πεδίου και του θορύβου μέτρησης. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια σειρά αποτελεσμάτων, τα οποία αποτελούνται από ένα πλήθος παραμετρικών μελετών.

Στο δεύτερο μέρος, μελετούμε την επέκταση της μεθόδου απεικόνισης στην τρισδιάστατη περίπτωση. Στα πλαίσια της διατριβής, η μελέτη εστιάζεται στο ευθύ τρισδιάστατο πρόβλημα. Η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος δίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Η αρχή γίνεται με τις εξισώσεις του Maxwell για το ολικό πεδίο στο χώρο συχνότητων, για να δώσουμε στο τέλος του κεφαλαίου τις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις του σχεδάζόμενου πεδίου. Εκμεταλλευόμενοι την ομοιότητα των εξισώσεων στις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε να χειριστούμε

με τρόπο ομοιόμορφο ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα διαφόρων ειδών.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων (*Finite-Difference Frequency-Domain*, FDFD) (Beilenhoff and Heinrich, 1992). Καθώς αυτή η μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί σε έναν κώδικα απεικόνισης για την επίλυση τού ευθέως προβλήματος, θεωρούμε ότι οι πληροφορίες σχετικά με το σκεδαστή είναι περιορισμένες. Γι' αυτό το λόγο, επιλέγουμε το κλασικό κυβικό πλέγμα τού Yee (1966) για να διακριτοποιήσουμε τις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις. Μια μέθοδος απεικόνισης δε θα μπορούσε να εκμεταλλευθεί τις ιδιότητες ενός βελτιωμένου πλέγματος – για παράδειγμα, καμπυλόγραμμων συντεταγμένων ή προσαρμοστικό – καθώς, εξ' ορισμού, το αντικείμενο στο οποίο θα έπρεπε να προσαρμοστεί το πλέγμα, είναι άγνωστο. Εξάλλου, οι κυβικές κυψέλες είναι η φυσική επέκταση των τετράγωνων κυψελών (*pixels*) τής δισδιάστατης περίπτωσης. Με τη βοήθεια των παραρτημάτων Β' ως Ε', παρουσιάζουμε τη διακριτοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων και το γραμμικό σύστημα που προκύπτει. Φροντίζουμε να εμφανίσουμε ρητά τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες τού χώρου υπολογισμού στη μαθηματική μορφή τού γραμμικού συστήματος. Αυτό είναι απαραίτητο ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο σε συνδυασμό με τις τεχνικές τού δεύτερου κεφαλαίου. Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε τα βασικά στοιχεία τής θεωρίας των απορροφητικών στρωμάτων, τα οποία χρησιμοποιούνται για τον τερματισμό τού πλέγματος τής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάπτυξη μιας μεθόδου μετασχηματισμού τού κοντινού σε μακρινό πεδίο, βασισμένη στο ολοκλήρωμα Kirchhoff. Οι αριθμητικές πιστοποιήσεις δείχνουν ότι αυτός ο μετασχηματισμός δίνει ακριβή αποτελέσματα, χωρίς πρακτικά να επιβάλλει περιορισμούς στις παραμέτρους τής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

Το έκτο κεφάλαιο αποτελείται από αριθμητικά αποτελέσματα τής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Για τα κλειστά προβλήματα, υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα τού πίνακα τού γραμμικού συστήματος. Για τα ανοιχτά προβλήματα, το δεύτερο μέλος τού γραμμικού συστήματος δεν είναι μηδενικό, και πρέπει να αντιστρέψουμε έναν πίνακα αραιής μορφής. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους (Saad, 1996) και κατάλληλες τεχνικές *preconditioning* (Bruaset, 1995).

Το έβδομο κεφάλαιο περιέχει τα συμπεράσματα τής διατριβής. Ανακεφαλαιώνουμε τα βασικά σημεία και εξετάζουμε τις προοπτικές αυτής τής εργασίας.

Η διατριβή περιλαμβάνει επτά παραρτήματα: το πρώτο αναφέρεται στο δεύτερο κεφάλαιο, και τα υπόλοιπα στο πέμπτο.

Μέρος Ι

Δισδιάστατη αριθμητική μοντελοποίηση

Κεφάλαιο 2

Μικροκυματική τομογραφία

Νῦν νῦν ἡ παραίσθησις καὶ τοῦ ὕπνου ἡ μιμική
Αἰὲν αἰὲν ὁ λόγος καὶ ἡ Τρόπις ἡ ἀστρική

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε σε συντομία μια μέθοδο μικροκυματικής τομογραφίας η οποία αναπτύχθηκε στα πλαίσια των εργασιών (Dourthe, 1997) και (Dourthe et al., 2000a). Η μέθοδος αυτή αποτελεί το εναρκτήριο σημείο τής παρούσας διδακτορικής διατριβής. Με βάση τη θεωρία αυτού τού κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε μια σειρά αριθμητικών αποτελεσμάτων στο επόμενο κεφάλαιο, εξερευνώντας τις δυνατότητες και τούς περιορισμούς τής μεθόδου.

2.1 Ευθύ πρόβλημα σκέδασης

2.1.1 Ορισμός

Θεωρούμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα αμετάβλητο ως προς μετατοπίσεις κατά τον άξονα z . Στην περίπτωση αυτή, όλα τα μεγέθη τού προβλήματος είναι ανεξάρτητα από τη μεταβλητή z . Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι το μαγνητικό πεδίο είναι εγκάρσιο στον άξονα συμμετρίας, τότε το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα, $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \omega) = E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega)\hat{z}$ ¹ όπου $\boldsymbol{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Τα παραπάνω περιγράφουν ένα δισδιάστατο πρόβλημα εγκάρσιας μαγνητικής πόλωσης, 2D-TM.²

Για ανομοιογενή προβλήματα μη μαγνητικών μέσων, σε περιοχές τού χώρου χωρίς πηγές ρεύματος και φορτίων, το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί τη δισδιάστα-

¹ Εκφράζουμε όλες τις χρονικά μεταβαλλόμενες ποσότητες στο πεδίο των συχνοτήτων, θεωρώντας χρονική εξάρτηση τής μορφής $e^{+j\omega t}$.

² Πρακτικά, ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί δισδιάστατο αν όλες οι ιδιότητες των μέσων που το αποτελούν παραμένουν σταθερές κατά τον άξονα z για αρκετά μήκη κύματος.

τη ομογενή εξίσωση τού Helmholtz:

$$\nabla_{xy}^2 E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega) + k^2(\boldsymbol{\rho}, \omega) E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega) = 0 \quad (2.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} k(\boldsymbol{\rho}, \omega) &= \omega \sqrt{\dot{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}, \omega) \mu_0} && \text{η μιγαδική σταθερά διάδοσης} \\ \dot{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}, \omega) &= \epsilon(\boldsymbol{\rho}, \omega) - j \frac{\sigma(\boldsymbol{\rho}, \omega)}{\omega} && \text{η μιγαδική ηλεκτρική επιδεκτικότητα} \\ \nabla_{xy}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} && \text{η δισδιάστατη λαπλασιανή.} \end{aligned}$$

Στο υπό εξέταση πρόβλημα, θεωρούμε δύο ημιάπειρα μέσα τα οποία χωρίζονται από ένα πλήθος στρωμάτων πεπερασμένου πάχους. Στο Σχήμα 2.1 βλέπουμε μια δισδιάστατη τομή τής γεωμετρίας. Όλα τα μέσα θεωρούνται ομογενή, με εξαίρεση το τελευταίο, στο εσωτερικό τού οποίου βρίσκεται ο ανομοιογενής χώρος D_d . Μπορούμε να γράψουμε:

$$k(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \begin{cases} k_i(\omega) & \boldsymbol{\rho} \in D_i \quad i = 1, \dots, N_L \\ k_d(\boldsymbol{\rho}, \omega) & \boldsymbol{\rho} \in D_d \end{cases} \quad (2.2)$$

και ομοίως για τα $\dot{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}, \omega)$, $\epsilon(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ και $\sigma(\boldsymbol{\rho}, \omega)$.

Με βάση την παραπάνω γεωμετρία, θεωρούμε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης όπου το προσπίπτον πεδίο προέρχεται από το μέσο D_1 και ο χώρος D_d αποτελεί το σκεδαστή.

2.1.2 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

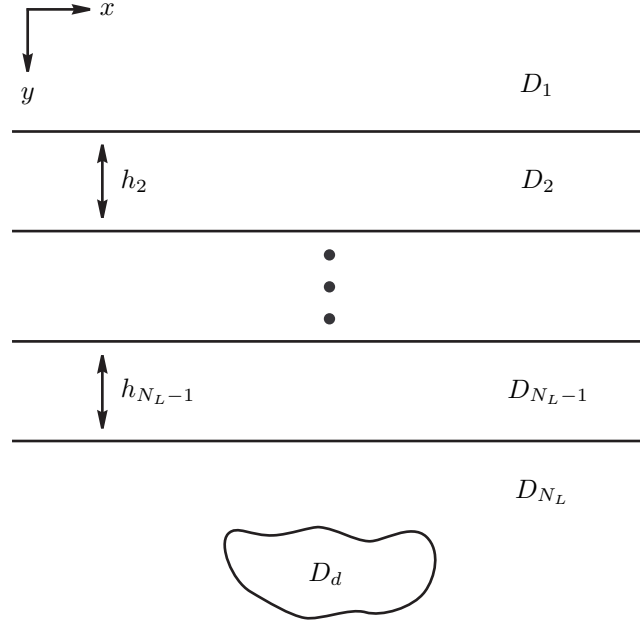
Για γραμμικά μέσα, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τού προσπίπτοντος και τού σκεδαζόμενου πεδίου,

$$E_z = E_z^{(i)} + E_z^{(s)} \quad (2.3)$$

όπου τόσο το προσπίπτον πεδίο $E^{(i)}$ όσο και το σκεδαζόμενο $E^{(s)}$ ικανοποιούν την εξίσωση (2.1).³

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα τού Green, μπορούμε να δείξουμε ότι το ολικό και το σκεδαζόμενο πεδίο σε κάθε σημείο τού χώρου δίνονται από τις

³Οι οριακές συνθήκες τις οποίες ικανοποιεί το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρία πολλαπλών στρωμάτων δισδιάστατου προβλήματος.

ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις:

$$E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega) = E_z^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \omega) + \iint_{D_d} k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}, \omega) E_z(\boldsymbol{\rho}', \omega) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}', \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4)$$

$$E_z^{(s)}(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \iint_{D_d} k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}', \omega) E_z(\boldsymbol{\rho}', \omega) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}', \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.5)$$

όπου συμβολίζουμε με

$$C(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \frac{\dot{\varepsilon}_d(\boldsymbol{\rho}, \omega) - \dot{\varepsilon}_{N_L}(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_d(\boldsymbol{\rho}, \omega) - \varepsilon_{N_L}(\omega)}{\varepsilon_0} - j \frac{\sigma_d(\boldsymbol{\rho}, \omega) - \sigma_{N_L}(\omega)}{\omega \varepsilon_0} \quad (2.6)$$

την αντίθεση τής μιγαδικής διηλεκτρικής σταθεράς μεταξύ του σκεδαστή και του μέσου που τον περικλείει, με $k_0(\omega) = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ τη σταθερά διάδοσης στο κενό, και με ε_0, μ_0 την ηλεκτρική επιδεκτικότητα και μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα. Για λόγους σύγκρισης των (2.4) και (2.5) με εναλλακτικές μορφές ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, σημειώνουμε ότι $k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}, \omega) = k^2(\boldsymbol{\rho}, \omega) - k_{N_L}^2(\omega)$.

Στις σχέσεις (2.4), (2.5) συμβολίζουμε με $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega)$ τη συνάρτηση Green τού προβλήματος απουσία τού χώρου D_d . Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει την εξίσωση Helmholtz με σημειακή πηγή στο σημείο $\boldsymbol{\rho}'$:

$$\nabla_{xy}^2 G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) + k_h^2(\boldsymbol{\rho}, \omega) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (2.7)$$

όπου

$$k_h(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \begin{cases} k_i(\omega) & \boldsymbol{\rho} \in D_i \quad i = 1, \dots, N_L \\ k_{N_L}(\omega) & \boldsymbol{\rho} \in D_d \end{cases}$$

είναι η μιγαδική σταθερά διάδοσης τού αντίστοιχου προβλήματος με ομογενή χώρο D_{N_L} .

Αν στη σχέση (2.4) περιορίσουμε το σημείο παρατήρησης στο εσωτερικό τού σκεδαστή D_d , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega) = E_z^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \omega) + \iint_{D_d} k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}', \omega) E_z(\boldsymbol{\rho}', \omega) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}' \quad \boldsymbol{\rho} \in D_d. \quad (2.8)$$

Πρόκειται για μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους, καθώς ο άγνωστος E_z εμφανίζεται τόσο μέσα όσο και έξω από το ολοκλήρωμα.

2.1.3 Μέθοδος Ροπών

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.8) επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Ροπών (Harrington, 1968). Γράφουμε τη (2.8) σε μορφή τελεστών ως:

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (2.9)$$

όπου:

$$f = E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega)$$

$$g = E_z^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \omega)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{I} - \mathcal{L}'$$

\mathcal{I} ο μοναδιαίος τελεστής

$$\mathcal{L}' = \iint_{D_d} k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}', \omega) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}', \quad \boldsymbol{\rho} \in D_d.$$

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε ότι ο χώρος D_d έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και τον διακριτοποιούμε σε $N_C = N_x N_y$ ορθογώνιες κυψέλες, διαστάσεων $\Delta_x \times \Delta_y$ η καθεμία. Συμβολίζουμε με S_n την επιφάνεια τής κυψέλης n , και με $\boldsymbol{\rho}_n$ το κέντρο της.

Επιλέγουμε για συναρτήσεις βάσης της μεθόδου των ροπών τις συναρτήσεις-σεισ-δείκτη:

$$f_n(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{\rho} \in S_n \\ 0 & \boldsymbol{\rho} \notin S_n \end{cases} \quad (2.10)$$

προσεγγίζοντας με αυτόν τον τρόπο τις ιδιότητες του σκεδαστή καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό αυτού με κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις προβολής που χρησιμοποιούμε είναι κατανομές δέλτα:

$$g_m(\boldsymbol{\rho}) = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_m). \quad (2.11)$$

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση f στη βάση f_m , γράφοντας:

$$f = E_z(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \sum_{n=1}^{N_C} a_n f_n(\boldsymbol{\rho}) \quad (2.12)$$

απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι $a_n = E_z(\boldsymbol{\rho}_n, \omega)$.

Εισάγουμε την παραπάνω σχέση στη (2.9) και προβάλλουμε τα δύο μέλη της στις συναρτήσεις g_m . Προκύπτει τότε το παρακάτω γραμμικό σύστημα N_C εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους, τις τιμές του ολικού πεδίου στο κέντρο κάθε κυψέλης του σκεδαστή:

$$\sum_{n=1}^{N_C} [\delta_{m,n} - k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}_n, \omega) G_{m,n}^O] E_z(\boldsymbol{\rho}_n, \omega) = E_z^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_m, \omega), \quad m = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

όπου $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$ και $G_{m,n}^O$ είναι το ολοκλήρωμα σκεδαστή-σκεδαστή της συνάρτησης Green, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$G_{m,n}^O = \iint_{S_n} G(\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}', \quad \boldsymbol{\rho}_m \in D_d. \quad (2.14)$$

Γνωρίζοντας το ολικό πεδίο στο εσωτερικό του σκεδαστή D_d μπορούμε να υπολογίσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο έξω από αυτόν. Αντικαθιστούμε τη (2.12) στη (2.5) θεωρώντας ότι $C(\boldsymbol{\rho}, \omega) = C(\boldsymbol{\rho}_n, \omega)$ στο εσωτερικό της κυψέλης n και παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$E_z^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_m, \omega) = \sum_{n=1}^{N_C} k_0^2(\omega) C(\boldsymbol{\rho}_n, \omega) G_{m,n}^R E_z(\boldsymbol{\rho}_n, \omega), \quad \boldsymbol{\rho}_m \notin D_d \quad (2.15)$$

όπου $G_{m,n}^R$ είναι το ολοκλήρωμα σκεδαστή-δέκτη της συνάρτησης Green, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$G_{m,n}^R = \iint_{S_n} G(\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}', \omega) d\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}_m \notin D_d. \quad (2.16)$$

Οι Chommeloux (1987) και Dourthe (1997) δίνουν την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega)$ και των ολοκληρωμάτων $G_{m,n}^O$ και $G_{m,n}^R$ όταν υπάρχει μόνο ένα στρώμα μεταξύ των ημιάπειρων μέσων του Σχήματος 2.1 (περίπτωση $N_L = 3$).

2.1.4 Εξισώσεις πινάκων

Θεωρούμε ότι στο χώρο D_1 υπάρχουν N_M σημεία μέτρησης και N_S σημεία εκπομπής⁴. Σε κάθε σημείο μετράμε το σκεδαζόμενο πεδίο για ένα πλήθος N_F συχνοτήτων και για καθένα από τα N_S προσπίπτοντα κύματα. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα και εκπομπή, ορίζουμε τα παρακάτω διανύσματα που περιέχουν τιμές μεγεθών στο εσωτερικό του σκεδαστή D_d :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \{E_z(\boldsymbol{\rho}_n, \omega)\} \\ \mathbf{e}^{(i)} &= \{E_z^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_n, \omega)\} \\ \boldsymbol{\rho}_n &\in D_d \\ n &= 1, \dots, N_C \end{aligned}$$

και επίσης το διάνυσμα $\mathbf{e}^{(s)}$ που περιέχει τιμές από το χώρο D_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(s)} &= \{E_z^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_m, \omega)\} \\ \boldsymbol{\rho}_m &\in D_1 \\ m &= 1, \dots, N_M. \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω διανύσματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους πίνακες:

ολικού πεδίου	\mathbf{E}	$(N_C \times N_S)$
προσπίπτοντος πεδίου	$\mathbf{E}^{(i)}$	$(N_C \times N_S)$
σκεδαζόμενου πεδίου	$\mathbf{E}^{(s)}$	$(N_M \times N_S)$

των οποίων κάθε στήλη περιέχει το διάνυσμα μιας εκπομπής.

⁴ Προκειμένου για επίπεδα προσπίπτοντα κύματα, τα σημεία N_S βρίσκονται στο άπειρο.

Οι N_C τιμές τής αντίθεσης μπορούν να γραφούν σε μορφή διανύσματος:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \{C(\boldsymbol{\rho}_n, \omega)\} \\ \boldsymbol{\rho}_n &\in D_d \\ n &= 1, \dots, N_C\end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ο διαγώνιος πίνακας:

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{c}) \quad (N_C \times N_C).$$

Τα ολοκληρώματα $G_{m,n}^O$ και $G_{m,n}^R$ εξαρτώνται αποκλειστικά από τη γεωμετρία του προβλήματος. Οι τιμές τους μπορούν να γραφούν στη μορφή των πινάκων:

$$\begin{aligned}\text{σκεδαστή-σκεδαστή} \quad \mathbf{G}^O &= \{G_{m,n}^O\} \quad (N_C \times N_C) \\ \text{σκεδαστή-δέκτη} \quad \mathbf{G}^R &= \{G_{m,n}^R\} \quad (N_M \times N_C).\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (2.13) και (2.15) μπορούν τώρα να γραφούν σε μορφή πινάκων. Για κάθε συχνότητα και εκπομπή ξεχωριστά έχουμε:

$$\mathbf{e}^{(i)} = (\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}) \mathbf{e} \quad (2.17\alpha')$$

$$\mathbf{e}^{(s)} = \mathbf{G}^R \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (2.17\beta')$$

ενώ αν πάρουμε υπόψη όλες τις εκπομπές μαζί, για κάθε συχνότητα ισχύει:

$$\mathbf{E}^{(i)} = (\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}) \mathbf{E} \quad (2.18\alpha')$$

$$\mathbf{E}^{(s)} = \mathbf{G}^R \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (2.18\beta')$$

όπου \mathbf{I}_{N_C} ο μοναδιαίος $N_C \times N_C$ πίνακας.

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας $(\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C})$ είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να γράψουμε το σκεδαζόμενο πεδίο συναρτήσει του προσπίπτοντος πεδίου και των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων του προβλήματος:

$$\mathbf{e}^{(s)} = \mathbf{G}^R \mathbf{C} (\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C})^{-1} \mathbf{e}^{(i)} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E}^{(s)} = \mathbf{G}^R \mathbf{C} (\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C})^{-1} \mathbf{E}^{(i)}. \quad (2.20)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τη λύση του ευθέως προβλήματος σκέδασης για μια συγκεκριμένη συχνότητα ω . Από τον ορισμό (2.6) προκύπτει ότι ο πίνακας \mathbf{C} μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}_r(\omega)) - j \frac{\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}(\omega))}{\omega \varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_{N_L}(\omega)}{\varepsilon_0} - j \frac{\sigma_{N_L}(\omega)}{\omega \varepsilon_0} \right) \mathbf{I}_{N_C} \quad (2.21)$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\omega) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0}$, και $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ τα διανύσματα των τιμών τής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας και τής αγωγιμότητας στις N_C κυψέλες του σκεδαστή.

2.2 Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

2.2.1 Ορισμός

Το πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ είναι η εύρεση των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων του σχεδαστή D_d με βάση το προσπίπτον πεδίο, τις ιδιότητες των μέσων που τον περιβάλλουν και το σκεδαζόμενο από αυτόν πεδίο.⁵

Οι γνωστές ποσότητες είναι:

- οι ιδιότητες των N_L μέσων του Σχήματος 2.1
 ϵ_i ($i = 1, \dots, N_L$), h_i ($i = 2, \dots, N_L - 1$)
- οι θέσεις των N_C κυψελών του χώρου D_d
- οι θέσεις των N_M σημείων μέτρησης στο χώρο D_1 : συμβολίζουμε με L_M το σύνολο αυτών των σημείων
- το προσπίπτον πεδίο στα κέντρα των N_C κυψελών, για καθεμιά από τις N_F συχνότητες και N_S εκπομπές
 $\mathbf{e}_{f,s}^{(i)}$ ή $\mathbf{E}_f^{(i)}$ ($f = 1, \dots, N_F$, $s = 1, \dots, N_S$)
- το σκεδαζόμενο πεδίο στα N_M σημεία μέτρησης, για καθεμιά από τις N_F συχνότητες και N_S εκπομπές
 $\mathbf{e}_{f,s}^{(s)}$ ή $\mathbf{E}_f^{(s)}$ ($f = 1, \dots, N_F$, $s = 1, \dots, N_S$)

και οι ζητούμενες ποσότητες είναι οι τιμές της επιδεκτικότητας και της αγωγιμότητας κάθε κυψέλης.

Θεωρούμε ότι ο σχεδαστής είναι μέσο χωρίς διασπορά: σ' αυτή την περίπτωση οι ιδιότητές του είναι ανεξάρτητες της συχνότητας. Έτσι μπορούμε να γράφουμε για τον πίνακα της αντίθεσης $\mathbf{C}(\epsilon_r, \sigma)$ παραλείποντας τη μη εκπεφρασμένη εξάρτηση από τη συχνότητα. Αν επιπλέον ορίσουμε το διάνυσμα $\chi = (\epsilon_r^T \sigma^T)^T$ που περιλαμβάνει τις $2N_C$ τιμές διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας, μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{C}(\chi)$.

Για να βρούμε το διάνυσμα χ που επαληθεύει την εξίσωση (2.19), χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική μέθοδο. Ξεκινώντας από μια αρχική τιμή χ^0 , δημιουργούμε μια ακολουθία διανυσμάτων ηλεκτρικών παραμέτρων, με στόχο να βρούμε τις ιδιότητες του σχεδαστή εκείνου που δίνει το ίδιο σκεδαζόμενο πεδίο με τον άγνωστο σχεδαστή.

⁵Το αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτήτων των N_L μέσων του Σχήματος 2.1 χωρίς το σχεδαστή D_d , έχει μελετηθεί από τους Aliferis et al. (2000b) για την περίπτωση ακουστικών κυμάτων.

Κατασκευάζουμε ένα συναρτησιοειδές που μετρά τη διαφορά ανάμεσα στο σκεδαζόμενο πεδίο αναφοράς – το οποίο προκύπτει από τον άγνωστο σκεδαστή – και στο σκεδαζόμενο πεδίο από το αντικείμενο κάθε επανάληψης:

$$J(\chi) \triangleq \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \|\mathbf{r}_{f,s}(\chi)\|_{L_M}^2 \quad (2.22)$$

όπου

$$\mathbf{r}_{f,s}(\chi) = \mathbf{e}_{f,s}^{(s)} - \mathbf{G}^R \mathbf{C}(\chi) \left[\mathbf{I}_{N_C} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}(\chi) \right]^{-1} \mathbf{e}_{f,s}^{(i)}. \quad (2.23)$$

Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{L_M}$ το μέτρο που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_M}$ τού χώρου $\mathcal{L}^2(L_M)$ των μιγαδικών συναρτήσεων ολοκληρώσιμου τετραγώνου στο L_M . Στη συνεχή περίπτωση, το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων δίνεται από:

$$\langle u, v \rangle_{L_M} = \int_{L_M} u(\boldsymbol{\rho}) v^*(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (2.24)$$

ενώ στη διακριτή περίπτωση η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\langle u, v \rangle_{L_M} = \sum_{m=1}^{N_M} u(\boldsymbol{\rho}_m) v^*(\boldsymbol{\rho}_m) \quad (2.25)$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό z^* για το συζυγή μιγαδικό τού z .

Το συναρτησιοειδές (2.22) έχει μη γραμμική εξάρτηση από τη μεταβλητή χ . Η ελαχιστοποίησή του θα δώσει τη λύση τού αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή το διάνυσμα χ που παράγει το κοντινότερο σκεδαζόμενο πεδίο ως προς το πεδίο αναφοράς.

2.2.2 Μέθοδος συζυγών κλίσεων

Εφαρμόζουμε τη μη γραμμική μέθοδο των συζυγών κλίσεων με την παραλλαγή Polak-Ribière για την ελαχιστοποίηση τής (2.22). Η ακολουθία των διανυσμάτων χ^k ($k \geq 0$) κατασκευάζεται σύμφωνα με τα παρακάτω:

$$\chi^{k+1} = \chi^k + \alpha^k \eta^k \quad (2.26)$$

όπου:

$$\boldsymbol{\eta}^k = \begin{cases} \mathbf{g}^0 & k = 0 \\ \mathbf{g}^k + \beta^k \boldsymbol{\eta}^{k-1} & k \geq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{g}^k = \nabla J(\boldsymbol{\chi}^k) \quad (2.28)$$

$$\alpha^k : \frac{\partial}{\partial \alpha^k} J(\boldsymbol{\chi}^{k+1}) = 0 \quad (2.29)$$

$$\beta^k = \frac{\langle \mathbf{g}^k, \mathbf{g}^k - \mathbf{g}^{k-1} \rangle_{D_d}}{\|\mathbf{g}^{k-1}\|_{D_d}^2}. \quad (2.30)$$

Από τη μορφή μπλοκ του διανύσματος $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_r^T \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ προκύπτει ότι:

$$\mathbf{g}^k = \nabla J(\boldsymbol{\chi}^k) = \left([\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}_r} J(\boldsymbol{\chi}^k)]^T [\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} J(\boldsymbol{\chi}^k)]^T \right)^T \triangleq \left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^k \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}}^k \right)^T. \quad (2.31)$$

Χωρίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}^k$ στην ίδια δομή μπλοκ, $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^T \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\sigma}}^T)^T$ και ορίζουμε:

$$\mathbf{d}^k = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^k - j \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\sigma}}^k \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A}^k = \left[\mathbf{I}_{N_c} - \mathbf{G}^0 \mathbf{C}(\boldsymbol{\chi}^k) \right]^{-1}. \quad (2.33)$$

Η κλίση του συναρτησιοειδούς (2.22) υπολογίζεται από τη σχέση (2.31), όπου (Dourthe, 1997):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^k &= -2 \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \text{Re} \left(\text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)})^* \mathbf{A}^{k*} \mathbf{G}^{\mathbf{R}\dagger} \mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\chi}^k) \right) \\ \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}}^k &= -2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \text{Im} \left(\text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)})^* \mathbf{A}^{k*} \mathbf{G}^{\mathbf{R}\dagger} \mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\chi}^k) \right) \end{aligned}$$

ενώ ο συντελεστής α^k δίνεται από:

$$\alpha^k = \frac{\sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \text{Re} \left\langle \mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\chi}^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{kT} \text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)}) \mathbf{d}^k \right\rangle_{L_M}}{\left\| \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{kT} \text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)}) \mathbf{d}^k \right\|_{L_M}^2}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με \mathbf{A}^\dagger τον ερμιτιανό συζυγή του πίνακα \mathbf{A} , ο οποίος ισούται με το συζυγή μιγαδικό του \mathbf{A}^T .

Για τον υπολογισμό του συντελεστή β^k , σχέση (2.30), σημειώνουμε ότι από τη δομή του διανύσματος \mathbf{g} προκύπτει: $\langle \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j \rangle_{D_d} = \langle \mathbf{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^i, \mathbf{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}_r}^j \rangle_{D_d} + \langle \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}}^i, \mathbf{g}_{\boldsymbol{\sigma}}^j \rangle_{D_d}$.

Παρατήρηση 2.1 Από τον ορισμό του πίνακα \mathbf{A}^k (2.1) προκύπτει ότι σε κάθε επανάληψη του αντίστροφου προβλήματος, επιλύουμε το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα για το σκεδαστή της τρέχουσας επανάληψης.

2.2.3 Μέθοδος διςυζυγών κλίσεων

Θεωρούμε ότι το συναρτησιοειδές της εξίσωσης (2.22) εξαρτάται από δύο μεταβλητές, τα διανύσματα ε_r και σ :

$$J(\varepsilon_r, \sigma) \triangleq \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \|\mathbf{r}_{f,s}(\varepsilon_r, \sigma)\|_{L_M}^2 \quad (2.34)$$

και εφαρμόζουμε τη μη γραμμική μέθοδο συζυγών κλίσεων ξεχωριστά σε κάθε διάνυσμα. Μ' αυτόν τον τρόπο, κατά τη διαδικασία ελαχιστοποίησης, το κάθε διάνυσμα εξελίσσεται ανεξάρτητα από το άλλο, κάτι που ανταποκρίνεται στη φυσική διάσταση του προβλήματος.

Δημιουργούμε δύο ακολουθίες διανυσμάτων,

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{k+1} &= \varepsilon_r^k + \alpha_{\varepsilon_r}^k \eta_{\varepsilon_r}^k \\ \sigma^{k+1} &= \sigma^k + \alpha_{\sigma}^k \eta_{\sigma}^k \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon_r}^k &= \begin{cases} \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^0 & k = 0 \\ \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k + \beta_{\varepsilon_r}^k \eta_{\varepsilon_r}^{k-1} & k \geq 1 \end{cases} \\ \eta_{\sigma}^k &= \begin{cases} \mathbf{g}_{\sigma}^0 & k = 0 \\ \mathbf{g}_{\sigma}^k + \beta_{\sigma}^k \eta_{\sigma}^{k-1} & k \geq 1 \end{cases} \\ \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k &= \nabla_{\varepsilon_r} J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \\ \mathbf{g}_{\sigma}^k &= \nabla_{\sigma} J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \\ \alpha_{\varepsilon_r}^k &: \frac{\partial}{\partial \alpha_{\varepsilon_r}^k} J(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) = 0 \\ \alpha_{\sigma}^k &: \frac{\partial}{\partial \alpha_{\sigma}^k} J(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) = 0 \\ \beta_{\varepsilon_r}^k &= \frac{\langle \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k, \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k - \mathbf{g}_{\varepsilon_r}^{k-1} \rangle_{D_d}}{\|\mathbf{g}_{\varepsilon_r}^{k-1}\|_{D_d}^2} \\ \beta_{\sigma}^k &= \frac{\langle \mathbf{g}_{\sigma}^k, \mathbf{g}_{\sigma}^k - \mathbf{g}_{\sigma}^{k-1} \rangle_{D_d}}{\|\mathbf{g}_{\sigma}^{k-1}\|_{D_d}^2}. \end{aligned}$$

Οι εκφράσεις για τις κλίσεις $\mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k$, \mathbf{g}_{σ}^k είναι ίδιες με εκείνες τής προηγούμενης παραγράφου, ενώ οι συντελεστές κλίμακας $\alpha_{\varepsilon_r}^k$, α_{σ}^k έχουν πολυπλοκότερη μορφή και υπολογίζονται στην αναφορά (Dourthe, 1997).

2.2.4 Κανονικοποίηση

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτήτων του σκεδαστή D_d είναι μη καλώς τοποθετημένο, γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη χρήση μιας μεθόδου κανονικοποίησης. Χρησιμοποιώντας την κανονικοποίηση, δίνουμε συμπληρωματική, a priori, πληροφορία σχετικά με τις ιδιότητες τής επιθυμητής λύσης. Εφαρμόζουμε εδώ μια μέθοδο βασισμένη σε μια τεχνική διατήρησης ασυνεχειών (Lobel, 1996, Lobel et al., 1997a) στην οποία αναφερθήκαμε σε συντομία στην παράγραφο 1.1.5 (σελίδα 8).

Οι μέθοδοι ντετερμινιστικής κανονικοποίησης που εξετάζουμε τροποποιούν το συναρτησιοειδές τής σχέσης (2.22) προσθέτοντας έναν όρο τής μορφής:

$$\zeta^2 \iint_{D_d} \phi(\|\nabla C(\rho)\|) d\rho \quad (2.35)$$

ή, θεωρώντας ξεχωριστά την εξάρτηση από ε και σ :

$$\zeta_{\varepsilon_r}^2 \iint_{D_d} \phi(\|\nabla \varepsilon_r(\rho)\|) d\rho + \zeta_{\sigma}^2 \iint_{D_d} \phi(\|\nabla \sigma(\rho)\|) d\rho. \quad (2.36)$$

Στη διακριτή περίπτωση, το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\zeta^2 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi(\|(\nabla \mathbf{c})_{i,j}\|) \quad (2.37)$$

όπου το μέτρο τής κλίσης ενός πίνακα ορίζεται στο παράρτημα Α' (σχέση (Α'.3), σελίδα 117).⁶

Η πληροφορία για τη λύση τού αντίστροφου προβλήματος προέρχεται τώρα από δύο πηγές: το σκεδαζόμενο πεδίο αναφοράς και την κανονικοποίηση. Οι συντελεστές βάρους ζ επιλέγονται ανάλογα με το βαθμό αξιοπιστίας που αποδίδουμε σε καθεμιά από τις δύο πηγές πληροφορίας. Αν τα δεδομένα τής μέτρησης τού σκεδαζόμενου πεδίου είναι αξιόπιστα, τότε τα βάρη μπορούν να

⁶Στον όρο $\nabla \mathbf{c}$, συμβολίζουμε με \mathbf{c} τον πίνακα $N_x \times N_y$ των τιμών τής αντίθεσης στις N_C κυψέλες τού σκεδαστή και όχι το διάνυσμα μήκους $N_x N_y$. Επιλέγουμε να μην επιβαρύνουμε το συμβολισμό, πιστεύοντας ότι δε δημιουργούμε σύγχυση. Χρησιμοποιούμε περιορισμένα αυτή τη δυαδικότητα: στην παρούσα ενότητα, σε όρους που περιέχουν τον τελεστή ∇ , και στο επόμενο κεφάλαιο στις σχέσεις (3.1), σελίδα 31.

πάρουν μικρές τιμές· στην αντίθετη περίπτωση, αυξάνουμε τη σημασία της *a priori* πληροφορίας.

Η επίδραση τού όρου τής κανονικοποίησης στη διαδικασία ελαχιστοποίησης τού συναρτησιοειδούς εξαρτάται από τη μορφή τής συνάρτησης $\phi(\cdot)$. Για παράδειγμα, για κανονικοποίηση τύπου Tikhonov ισχύει $\phi(t) = t^2$. Αυτή η επιλογή οδηγεί σε ελαχιστοποίηση τού τετραγώνου τού μέτρου τής κλίσης τής αντίθεσης, οπότε η λύση που παίρνουμε έχει λείο προφίλ $\varepsilon(\rho)$ και $\sigma(\rho)$.

Η κανονικοποίηση με διατήρηση ασυνεχειών οδηγεί σε μια λύση κατά τμήματα ομαλή. Ασυνέχειες στις τιμές των $\varepsilon(\rho)$ και $\sigma(\rho)$ διατηρούνται, εφόσον είναι μεγαλύτερες από ένα κατώφλι, ενώ οι περιοχές με μικρότερες μεταβολές εξομαλύνονται. Οι τρεις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση ϕ ώστε να ισχύουν τα παραπάνω είναι:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t)}{t} = M < \infty \quad \begin{array}{l} \text{ισοτροπική λείανση} \\ \text{στις ομογενείς περιοχές} \end{array} \quad (2.38\alpha')$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi'(t)}{t} = 0 \quad \text{διατήρηση ασυνεχειών} \quad (2.38\beta')$$

$$\frac{\phi'(t)}{t} \text{ μονότονα φθίνουσα} \quad \text{ευστάθεια τής κανονικοποίησης.} \quad (2.38\gamma')$$

Αποδεικνύεται ότι για τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες, υπάρχει μια συνάρτηση $\psi(\cdot)$ και μια μεταβλητή b εξαρτώμενη από το t , τέτοιες ώστε, για κάθε $t > 0$, να μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi(t) = \min_b [bt^2 + \psi(b)] \quad (2.39)$$

$$\tilde{b} \triangleq b_{\min} = \frac{\phi'(t)}{2t}. \quad (2.40)$$

Σημειώνουμε ότι οι συνθήκες (2.38) έχουν άμεση εφαρμογή στις τιμές τού \tilde{b} . Θα επανέρθουμε σ' αυτήν την παρατήρηση στο τέλος τού κεφαλαίου.

Δύο συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κανονικοποίηση με διατήρηση ασυνεχειών είναι οι:

$$\phi_{gc}(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \phi'_{gc}(t) = \frac{2}{(1+t^2)^2} t \quad \text{Geman \& Mc Clure} \quad (2.41)$$

$$\phi_{hl}(t) = \log(1+t^2) \quad \phi'_{hl}(t) = \frac{2}{(1+t^2)} t \quad \text{Hebert \& Leahy.} \quad (2.42)$$

Για την εφαρμογή τής κανονικοποίησης στη μέθοδο ελαχιστοποίησης διευ-
ζυγών κλίσεων, το συναρτησιοειδές τής σχέσης (2.34) γράφεται:

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \|\mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma})\|_{L_M}^2 + \zeta_{\varepsilon_r}^2 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi\left(\frac{\|(\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_r)_{i,j}\|}{\delta_{\varepsilon_r}}\right) + \zeta_{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi\left(\frac{\|(\nabla \boldsymbol{\sigma})_{i,j}\|}{\delta_{\sigma}}\right). \quad (2.43)$$

όπου δ_{ε_r} , δ_{σ} είναι το κατώφλι για την ανίχνευση των ασυνεχειών τής διηλεκτρι-
κής σταθεράς και τής ηλεκτρικής αγωγιμότητας, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τη μορφή με τη μεταβλητή b , γράφουμε:

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \|\mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma})\|_{L_M}^2 + \min_{\mathbf{b}_{\varepsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}} J_{\text{reg}}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}_{\varepsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}) \quad (2.44)$$

όπου:

$$J_{\text{reg}}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}_{\varepsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}) = \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (\mathbf{b}_{\varepsilon_r})_{i,j} \|(\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_r)_{i,j}\|^2 + \psi((\mathbf{b}_{\varepsilon_r})_{i,j}) + \frac{\zeta_{\sigma}^2}{\delta_{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (\mathbf{b}_{\sigma})_{i,j} \|(\nabla \boldsymbol{\sigma})_{i,j}\|^2 + \psi((\mathbf{b}_{\sigma})_{i,j}). \quad (2.45)$$

Με βάση τη σχέση (2.40), τα $\mathbf{b}_{\varepsilon_r}$, \mathbf{b}_{σ} που ελαχιστοποιούν το συναρτησιοει-
δές J_{reg} για σταθερά $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ και $\boldsymbol{\sigma}$, ισούνται με:

$$(\tilde{\mathbf{b}}_{\varepsilon_r})_{i,j} = \frac{\phi'\left(\frac{1}{\delta_{\varepsilon_r}} \|(\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_r)_{i,j}\|\right)}{\frac{2}{\delta_{\varepsilon_r}} \|(\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_r)_{i,j}\|} \quad (2.46\alpha')$$

$$(\tilde{\mathbf{b}}_{\sigma})_{i,j} = \frac{\phi'\left(\frac{1}{\delta_{\sigma}} \|(\nabla \boldsymbol{\sigma})_{i,j}\|\right)}{\frac{2}{\delta_{\sigma}} \|(\nabla \boldsymbol{\sigma})_{i,j}\|}. \quad (2.46\beta')$$

Όπως αποδεικνύεται (Dourthe, 1997) για την κλίση τού συναρτησιοειδούς
(2.43) με τους όρους κανονικοποίησης, ισχύει:

$$\mathbf{g}_{\varepsilon_r}^k = -2 \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \text{Re} \left(\text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)})^* \mathbf{A}^{k*} \mathbf{G}^{\text{R}\dagger} \mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}) \right) - 2 \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \nabla_{\mathbf{b}_{\varepsilon_r}^k}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_r^k$$

$$\mathbf{g}_{\sigma}^k = -2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \sum_{f=1}^{N_F} \sum_{s=1}^{N_S} \text{Im} \left(\text{diag}(\mathbf{A}^k \mathbf{e}_{f,s}^{(i)})^* \mathbf{A}^{k*} \mathbf{G}^{\text{R}\dagger} \mathbf{r}_{f,s}(\boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\sigma}) \right) - 2 \frac{\zeta_{\sigma}^2}{\delta_{\sigma}^2} \nabla_{\mathbf{b}_{\sigma}^k}^2 \boldsymbol{\sigma}^k$$

όπου η λαπλασιανή ενός πίνακα ως προς έναν άλλο ορίζεται στο παράρτημα Α' (σχέση (Α'.5), σελίδα 118).

Οι συντελεστές κλίμακας $\alpha_{\epsilon_r}^k, \alpha_{\sigma}^k$ έχουν πολυπλοκότερη μορφή αλλά έχουν υπολογιστεί στην αναφορά (Dourthe, 1997).

Για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιοειδούς (2.45) επιλέγονται πρώτα οι βέλτιστες τιμές των $\mathbf{b}_{\epsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}$, όπως αυτές προκύπτουν από την εξίσωση (2.46). Στη συνέχεια, τα ϵ_r, σ μεταβάλλονται σύμφωνα με τους τύπους της παραγράφου 2.2.3, με σταθερά $\mathbf{b}_{\epsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}$, για ορισμένο αριθμό N_{int} εσωτερικών επαναλήψεων. Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται, ελαχιστοποιώντας εναλλάξ ως προς τις παραμέτρους της κανονικοποίησης και τις ιδιότητες του χώρου D_d .

Η ακριβής μορφή της συνάρτησης $\psi(\cdot)$ δίνεται από τον Charbonnier (1994) αλλά δεν είναι απαραίτητη για τους υπολογισμούς. Όταν καθοριστούν οι τιμές των παραμέτρων $\mathbf{b}_{\epsilon_r}, \mathbf{b}_{\sigma}$, οι όροι $\psi((\tilde{\mathbf{b}}_{\epsilon_r})_{i,j})$ και $\psi((\tilde{\mathbf{b}}_{\sigma})_{i,j})$ στη σχέση (2.45) παραμένουν σταθεροί κατά την ελαχιστοποίηση ως προς ϵ_r και σ και γι' αυτό μπορούν να παραλειφθούν. Σ' αυτή την περίπτωση, ο όρος J_{reg} έχει τετραγωνική εξάρτηση από το μέτρο της κλίσης των ϵ_r και σ σε κάθε κυψέλη. Οι τιμές των $(\tilde{\mathbf{b}}_{\epsilon_r})_{i,j}$ και $(\tilde{\mathbf{b}}_{\sigma})_{i,j}$ αντιστοιχούν σε συντελεστές βάρους.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια εξήγηση του μηχανισμού αυτού του είδους κανονικοποίησης. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, την επίπτωσή της στη διηλεκτρική σταθερά γύρω από την κυψέλη (i, j) . Η συνεισφορά του συναρτησιοειδούς κανονικοποίησης J_{reg} στο συνολικό συναρτησιοειδές (2.44) είναι ίση με

$$\zeta_{\epsilon_r}^2 (\tilde{\mathbf{b}}_{\epsilon_r})_{i,j} t^2$$

όπου

$$t = \frac{\|(\nabla \epsilon_r)_{i,j}\|}{\delta_{\epsilon_r}}.$$

Αυτός ο όρος έχει τη μορφή της κανονικοποίησης τύπου Tikhonov και οδηγεί σε λείανση του ϵ_r γύρω από την κυψέλη (i, j) . Η λείανση είναι περισσότερο ή λιγότερο σημαντική ανάλογα με το συντελεστή βάρους $(\tilde{\mathbf{b}}_{\epsilon_r})_{i,j}$.

Σύμφωνα με τις συνθήκες (2.38), σελίδα 25, ο συντελεστής $(\tilde{\mathbf{b}}_{\epsilon_r})_{i,j}$ γίνεται μέγιστος, ίσος με $M/2$, αν, όταν υπολογίζουμε την τιμή του, το μέτρο της κλίσης του ϵ_r στην κυψέλη (i, j) είναι πολύ μικρότερο από το κατώφλι δ_{ϵ_r} : οι ομογενείς περιοχές λειαίνονται περισσότερο (συνθήκη α', $t \rightarrow 0$). Ο συντελεστής βάρους γίνεται ολοένα μικρότερος για τις κυψέλες που παρουσιάζουν ολοένα μεγαλύτερες μεταβολές του ϵ_r στην περιοχή τους (συνθήκη γ') και τείνει στο μηδέν όταν οι μεταβολές γίνονται πολύ μεγαλύτερες από το κατώφλι (συνθήκη β', $t \rightarrow \infty$): οι ασυνέχειες διατηρούνται.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι η κανονικοποίηση με διατήρηση ασυνεχειών εφαρμόζει λείανση τύπου Tikhonov με τοπικούς συντελεστές, σε κάθε

κυψέλη ξεχωριστά. Οι συντελεστές αυτοί έχουν μεγάλες τιμές για τις ομογενείς περιοχές και μικρότερες – τείνοντας μονοτονικά στο μηδέν – για τις ανομοιογενείς. Οι τιμές τους υπολογίζονται δυναμικά, κάθε N_{int} επαναλήψεις ελαχιστοποίησης τού συναρτησιοειδούς, ώστε να λαμβάνεται υπόψη η εξέλιξη των ϵ_r και σ .

Η μεταβολή των συντελεστών σε σχέση με την παράμετρο t , δηλαδή η μορφή τής συνάρτησης $\tilde{b}(t) = \frac{\phi'(t)}{2t}$, καθορίζει τη συμπεριφορά τής κανονικοποίησης. Μια έντονα φθίνουσα μορφή, όπως αυτή που αντιστοιχεί στη ϕ_{ge} , ανακατασκευάζει προφίλ με πιο έντονες ασυνέχειες από ό,τι μια πιο αργή μεταβολή, όπως εκείνη που αντιστοιχεί στη συνάρτηση ϕ_{hl} .

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά αποτελέσματα

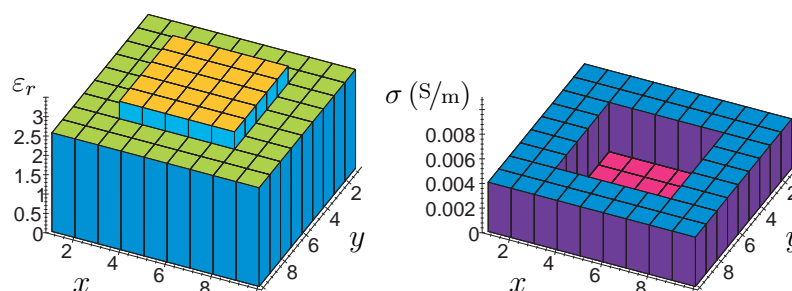
Νῦν τῶν λεπιδοπτέρων τὸ νέφος τὸ κινούμενο
Αἰὲν τῶν μυστηρίων τὸ φῶς τὸ περιπτάμενο

Στις πρώτες ενότητες τού κεφαλαίου, παρουσιάζουμε τις βελτιώσεις που έγιναν στη μέθοδο τού Dourthe (1997), στα πλαίσια τής παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια, μέσω μιας σειράς παραμετρικών μελετών, εξετάζουμε τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες τής μεθόδου μικροκυματικής απεικόνισης τού προηγούμενου κεφαλαίου.

3.1 Εισαγωγή

Χρησιμοποιούμε πολλαπλές προσπτώσεις και πολλαπλές ισαπέχουσες συχνότητες για να πάρουμε δεδομένα σκέδασης. Η γεωμετρία τού προβλήματος παραμένει όμοια με εκείνη τού Σχήματος 2.1 (σελίδα 15). Τα N_M σημεία μέτρησης τού σκεδαζόμενου πεδίου στο χώρο D_1 είναι συνευθειακά, ισαπέχοντα, και ορίζουν τη γραμμή μέτρησης μήκους $L_M = (N_M - 1)\Delta_M$, όπου Δ_M η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων μέτρησης. Η γραμμή μέτρησης είναι παράλληλη με τη διεπιφάνεια των μέσων D_1/D_2 και βρίσκεται σε απόσταση h_M από αυτή. Ο χώρος D_d έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, διαστάσεων $L_x \times L_y$, και αποτελείται από $N_C = N_x \times N_y$ κυψέλες, διαστάσεων $\Delta_x \times \Delta_y$ η καθεμία. Η πάνω πλευρά τού χώρου D_d απέχει h_d από τη διεπιφάνεια των μέσων D_{L-1}/D_L . Το κέντρο τού χώρου D_d ως προς τον άξονα x συμπίπτει με το κέντρο τής γραμμής μέτρησης.

Οι συναρτήσεις Green που δίνονται στην εργασία τού Dourthe (1997), καλύπτουν την περίπτωση $N_L = 3$. Σε όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ, θεωρούμε ότι έχουμε μόνο δύο ημιάπειρα μέσα, θέτοντας $h_2 = 0$. Επίσης, η γραμμή μέτρησης βρίσκεται σε επαφή με τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ημιχώρων ($h_M = 0$).



Σχήμα 3.1: Προφίλ διηλεκτρικής σταθεράς και αγωγιμότητας πραγματικού αντικειμένου. Οι αριθμοί στους άξονες x, y αναφέρονται σε κυψέλες.

Το πρόβλημα που μελετάμε έγκειται στην ανακατασκευή τού προφίλ διηλεκτρικής σταθεράς ενός αντικειμένου απείρου μήκους (πρακτικά, μεγαλύτερου από αρκετά μήκη κύματος) το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ομογενούς, αγωγίμου μέσου χωρίς διασπορά. Σε πραγματικές συνθήκες, τα δεδομένα τού αντίστροφου προβλήματος προέρχονται από μετρήσεις τού σκεδαζόμενου πεδίου. Εδώ, στη φάση πιστοποίησης και μελέτης τής μεθόδου, χρησιμοποιούμε συνθετικά δεδομένα σκέδασης, υπολογισμένα με τη μέθοδο των ροπών που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.¹

Για να παράγουμε το σκεδαζόμενο πεδίο, θεωρούμε γνωστό το αντικείμενο· τα αποτελέσματα τού αντίστροφου προβλήματος συγκρίνονται με το αντικείμενο αυτό. Ο σκεδαστής έχει τετραγωνική διατομή διαστάσεων $12.5 \times 12.5 \text{ cm}^2$ και βρίσκεται θαμμένος μέσα σε άμμο σε βάθος 23.75 cm . Η διηλεκτρική του σταθερά ισούται με $\epsilon_r = 3$ ενώ για την άμμο θεωρούμε τυπικές τιμές $\epsilon_r = 2.55$ και $\sigma = 4 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$.

Στο αντίστροφο πρόβλημα, θεωρούμε ότι δε γνωρίζουμε ακριβώς τη θέση τού σκεδαστή, οπότε ο χώρος D_d περιλαμβάνει όχι μόνο το διηλεκτρικό αντικείμενο αλλά και ένα τμήμα τού περιβάλλοντα χώρου. Έτσι η προς ανακατασκευή περιοχή έχει ανομοιογενές προφίλ (Σχήμα 3.1). Οι τιμές των παραμέτρων για τη διακριτοποίηση τού χώρου D_d περιλαμβάνονται στον Πίνακα 3.1, ενώ οι τιμές των παραμέτρων κανονικοποίησης, στον Πίνακα 3.2.

Τα προφίλ που προκύπτουν από τη λύση τού αντίστροφου προβλήματος

¹ Χρησιμοποιούμε την ίδια διακριτοποίηση για να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα και για να υπολογίσουμε τα συνθετικά δεδομένα. Όμως, δε διαπράττουμε το «αντίστροφο έγκλημα», γιατί η διακριτοποίηση είναι επαρκώς λεπτομερής. Αυτό διασφαλίζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων τής μεθόδου των ροπών: ακόμα και αν χρησιμοποιούσαμε μια διαφορετική διακριτοποίηση (αλλά πάντα επαρκώς λεπτομερή) για τα συνθετικά δεδομένα, το υπολογισμένο σκεδαζόμενο πεδίο δε θα ήταν διαφορετικό. Σε κάθε περίπτωση, η προσθήκη θορύβου στα συνθετικά δεδομένα (ενότητα 3.3) θα απομακρύνει κάθε αμφιβολία.

Πίνακας 3.1: Παράμετροι διακριτοποίησης χώρου D_d .

$L_x = L_y = 22.5 \text{ cm}$
$\Delta_x = \Delta_y = 2.5 \text{ cm}$
$N_x = N_y = 9$
$N_C = 81$
$h_d = 23.75 \text{ cm}$

Πίνακας 3.2: Παράμετροι κανονικοποίησης.

$\phi(\cdot) = \phi_{gc}(\cdot)$
$\zeta_{\varepsilon_r} = 10^{-2}$
$\zeta_\sigma = 10^{-3}$
$\delta_{\varepsilon_r} = 0.4$
$\delta_\sigma = 1.25 \cdot 10^{-3}$
$N_{\text{int}} = 10$

συγκρίνονται με αυτά του Σχήματος 3.1, τα οποία συνιστούν την επιθυμητή λύση. Ορίζουμε ως κριτήριο ποιότητας κάθε ανακατασκευής τις ποσότητες:

$$d_{\varepsilon_r} \triangleq \frac{\|\varepsilon_r - \varepsilon_r^d\|}{\|\varepsilon_r^d\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [(\varepsilon_r)_{ij} - (\varepsilon_r^d)_{ij}]^2}{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [(\varepsilon_r^d)_{ij}]^2}} \quad (3.1\alpha')$$

$$d_\sigma \triangleq \frac{\|\sigma - \sigma^d\|}{\|\sigma^d\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [(\sigma)_{ij} - (\sigma^d)_{ij}]^2}{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [(\sigma^d)_{ij}]^2}} \quad (3.1\beta')$$

όπου τα ε_r , σ είναι η λύση του αντίστροφου προβλήματος και ε_r^d , σ^d τα πραγματικά προφίλ (Σχήμα 3.1). Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, d_{ε_r} είναι η απόσταση των ανακατασκευασμένων τιμών διηλεκτρικής σταθεράς ε_r από τις πραγματικές ε_r^d , κανονικοποιημένη ως προς το μέτρο του ε_r^d . Αντίστοιχο νόημα έχει η d_σ για τις τιμές της αγωγιμότητας.²

Σημειώνουμε εδώ ότι οι τιμές του συναρτησιοειδούς J (σχέση (2.22), σελίδα 21) δεν αποτελούν αξιόπιστο κριτήριο για την ποιότητα της λύσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η ελαχιστοποίηση του συναρτησιοειδούς μπορεί να συγκλίνει σε ένα αντικείμενο διαφορετικό από το πραγματικό, αφού το αντίστροφο πρόβλημα είναι μη σωστά ορισμένο και επιδέχεται πολλαπλές λύσεις. Σε μια τέτοια

²Στους παραπάνω ορισμούς, χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τον ίδιο συμβολισμό για έναν πίνακα $N_x \times N_y$ και για το αντίστοιχο διάνυσμα μήκους $N_x N_y$. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στην υποσημείωση 6 της σελίδας 24.

περίπτωση, παρά τη μικρή τιμή του J , η λύση δε θα είναι σωστή. Αντίθετα, τα κριτήρια που ορίστηκαν στις (3.1) δίνουν πάντα ένα ακριβές μέτρο της ποιότητας της λύσης.

Σε όλα τα αριθμητικά πειράματα του κεφαλαίου, η αρχική εκτίμηση για τις ιδιότητες του χώρου D_d είναι εκείνη της μηδενικής αντίθεσης – θεωρούμε δηλαδή ότι ο D_d ταυτίζεται με τον εξωτερικό χώρο D_{N_L} – εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά στο κείμενο. Για την ελαχιστοποίηση χρησιμοποιούμε πεντακόσιες επαναλήψεις.

3.2 Μοντελοποίηση προσπίπτοντος πεδίου

Μια από τις προοπτικές της υπό μελέτη μεθόδου είναι να χρησιμοποιηθεί για ανακατασκευή με βάση πειραματικά δεδομένα σκέδασης. Εξετάζουμε εδώ την περίπτωση όπου τα N_S σημεία εκπομπής ταυτίζονται με τα N_M σημεία μέτρησης, οπότε ο χώρος D_d βρίσκεται στο κοντινό πεδίο των κεραιών εκπομπής. Υπό αυτές τις συνθήκες, το προσπίπτον πεδίο στο εσωτερικό του χώρου D_d δεν μπορεί πλέον να προσεγγιστεί με επίπεδα κύματα, αλλά πρέπει να μοντελοποιηθεί με ακρίβεια χρησιμοποιώντας κάποια άλλη μέθοδο. Σε αντίθετη περίπτωση, η μέθοδος ανακατασκευής ενδέχεται να μη συγκλίνει σε σωστό αποτέλεσμα, καθώς ένα από τα δεδομένα του αντίστροφου προβλήματος – το προσπίπτον πεδίο – δε θα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Η μέθοδος μικροκυματικής απεικόνισης του προηγούμενου κεφαλαίου τροποποιήθηκε κατάλληλα ώστε η πληροφορία για το προσπίπτον πεδίο να μπορεί να προέρχεται από δεδομένα αριθμητικής προσομοίωσης (Pichot et al., 1999, Aliferis et al., 2000a). Η ακτινοβολία από τις κεραιές εκπομπής υπολογίζεται αριθμητικά με το λογισμικό SR3D (Ratajczak et al., 1994, Brachat et al., 1996), το οποίο έχει αναπτυχθεί στο ερευνητικό κέντρο France Télécom, La Turbie (Ceroni et al., 1994) με βάση τη μέθοδο των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Οι υπολογισμοί του προσπίπτοντος πεδίου έγιναν από τον J.-Y. Dauvignac.

Οι προσομοιώσεις διαφόρων τύπων κεραιών παραμένουν σε μια βάση δεδομένων. Για τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιείται προσπίπτον πεδίο από κεραιές παπιγιόν (bow-tie) που ακτινοβολούν στην περιοχή 0.3 – 1.3 GHz. Το πεδίο είναι διαθέσιμο για βήμα συχνότητας 50 MHz, συνολικά για είκοσι μία συχνότητες. Αποτελέσματα ανακατασκευής με συνθετικά δεδομένα και ακτινοβολία από κεραιές τύπου ETSA (*Exponential Tapered Slot Antenna*) (Guillanton et al., 1998) στην περιοχή 1 – 6 GHz παρουσιάστηκαν από τους Guillanton et al. (2001).

3.3 Μοντελοποίηση μετρητικού θορύβου

Μια συνέπεια τής μη σωστής τοποθέτησης τού αντίστροφου προβλήματος είναι ότι η λύση μπορεί να μην έχει ομαλή εξάρτηση από τα δεδομένα. Στην περίπτωση ανακατασκευής με βάση πειραματικά δεδομένα, το σκεδαζόμενο πεδίο περιέχει πάντα μετρητικό θόρυβο, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε δυσκολία, ή ακόμα και αδυναμία, εύρεσης λύσης. Για να μελετήσουμε την ανθεκτικότητα τής μεθόδου απεικόνισης τροποποιούμε κατάλληλα τα συνθετικά δεδομένα, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο για το θόρυβο μέτρησης.

Θεωρούμε ότι ο θόρυβος μέτρησης είναι προσθετικός, ομοιόμορφος ή κανονικής κατανομής, με μηδενική μέση τιμή. Ο θόρυβος μπορεί να προστίθεται στο μέτρο και τη φάση τού σκεδαζόμενου πεδίου, ή στο πραγματικό και φανταστικό του μέρος. Η στάθμη τού θορύβου χαρακτηρίζεται από το πηλίκο σήματος προς θόρυβο, το οποίο ορίζεται ως:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{\text{ενέργεια σήματος}}{\text{ενέργεια θορύβου}} = 10 \log_{10} \frac{E_{\text{signal}}}{E_{\text{noise}}}.$$

Ως σήμα θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{e}_{\mathbf{f},\mathbf{s}}^{(\mathbf{s})}$ των τιμών τού σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου στα N_M σημεία μέτρησης, για μια συγκεκριμένη συχνότητα και εκπομπή. Αν προσθέτουμε το θόρυβο στο μέτρο και τη φάση τού σκεδαζόμενου πεδίου, τότε:

$$E_{\text{signal}} = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} \left| \left(\mathbf{e}_{\mathbf{f},\mathbf{s}}^{(\mathbf{s})} \right)_i \right|^2$$

ενώ αν ο θόρυβος προστίθεται χωριστά στις πραγματικές και τις φανταστικές τιμές τότε:

$$E_{\text{signal}} = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} \text{Re} \left[\left(\mathbf{e}_{\mathbf{f},\mathbf{s}}^{(\mathbf{s})} \right)_i \right]^2 \quad \text{για το πραγματικό μέρος}$$

$$E_{\text{signal}} = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} \text{Im} \left[\left(\mathbf{e}_{\mathbf{f},\mathbf{s}}^{(\mathbf{s})} \right)_i \right]^2 \quad \text{για το φανταστικό μέρος.}$$

Αν ο θόρυβος ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ και μηδενική μέση τιμή, η ενέργειά του δίνεται από:

$$E_{\text{noise}} = \frac{\alpha^2}{3}$$

ενώ αν πρόκειται για κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ , τότε:

$$E_{\text{noise}} = \sigma^2.$$

Σημειώνουμε ότι ο θόρυβος που προστίθεται στη φάση είναι πάντα μηδενικής μέσης τιμής, με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Από τις παραπάνω σχέσεις, με βάση τον τύπο θορύβου που προστίθεται και την επιθυμητή τιμή του πηλίκου σήματος προς θόρυβο, επιλέγονται για κάθε συχνότητα και εκπομπή τα κατάλληλα χαρακτηριστικά (α ή σ) τής κατανομής θορύβου, σε συνάρτηση με την ενέργεια του σήματος.

Σε όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ, ο θόρυβος ακολουθεί κανονική κατανομή και προστίθεται ξεχωριστά στο πραγματικό και το φανταστικό μέρος του σχεδάζόμενου πεδίου. Αυτή η επιλογή υπαγορεύεται από το γεγονός ότι οι μετρήσεις δίνουν σε ξεχωριστά κανάλια το πραγματικό και το φανταστικό μέρος.

Παρατήρηση 3.1 Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, ο θόρυβος περιγράφεται για κάθε μία από τις N_F συχνότητες και N_S εκπομπές με ένα τυχαίο διάνυσμα μήκους N_M . Οι τιμές κάθε διανύσματος ακολουθούν την ίδια κατανομή αλλά με διαφορετική παράμετρο. Οι $N_F N_S N_M$ τυχαίες τιμές αποτελούν μία αναπαράσταση του θορύβου. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε προέκυψαν από μία μόνο αριθμητική επίλυση για κάθε πρόβλημα. Καθώς το σύνολο των τυχαίων τιμών είναι μικρό και δεν αποτελεί χαρακτηριστικό δείγμα τής κατανομής, αναμένουμε διακυμάνσεις στα αποτελέσματα προβλημάτων με παραπλήσιες παραμέτρους, ιδίως όταν χρησιμοποιούμε υψηλές στάθμες θορύβου.³

3.4 Μελέτη ανοχής θορύβου

Παρουσιάζουμε μια σύντομη αρχική μελέτη τής συμπεριφοράς τής μεθόδου απέναντι στο θόρυβο. Επιλέγουμε τις παρακάτω τιμές για τα μεγέθη του προβλήματος:

$$\begin{array}{lll} L_M = 1.5 \text{ m} & N_M = 21 & \Delta_M = 7.5 \text{ cm} \\ f_{\min} = 0.3 \text{ GHz} & f_{\max} = 1.3 \text{ GHz} & N_F = 3. \end{array}$$

Παρατηρούμε (Σχήμα 3.2, σελίδα 36) ότι η ανακατασκευή τής διηλεκτρικής σταθεράς είναι ιδιαίτερα ανθεκτική στο θόρυβο. Με χρήση κανονικοποίησης, η επίδραση του θορύβου είναι αμελητέα μέχρι και τα 24 dB. Αντίθετα, το σφάλμα

³ Αναάλυψα μια θαναμάσια λύση γι' αυτό, αλλά δεν έχω αρκετό (υπολογιστικό) χρόνο.

στην ανακατασκευή της αγωγιμότητας γίνεται μεγάλο μόλις το πηλίκο σήματος προς θόρυβο πέσει κάτω από τα 40 dB. Η χρήση κανονικοποίησης βελτιώνει τα αποτελέσματα, όμως δεν είναι ικανή να διατηρήσει το σφάλμα της αγωγιμότητας σε ικανοποιητικά χαμηλό επίπεδο. Σε κάθε περίπτωση πάντως, ο αλγόριθμος δίνει τουλάχιστον ποιοτική πληροφορία για την αγωγιμότητα του άγνωστου αντικειμένου.

Για τιμές του πηλίκου σήματος προς θόρυβο μεγαλύτερες από 60 dB, οι μέσες τιμές των σφαλμάτων σταθεροποιούνται και μπορούμε να θεωρούμε ότι πρακτικά ο θόρυβος δεν υπάρχει.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου, σε όλα τα αποτελέσματα ο λόγος σήματος προς θόρυβο εμφανίζεται ως παράμετρος, για τις τιμές 30 dB και 40 dB. Συμβολίζουμε με $\text{SNR} = \infty$ την απουσία θορύβου.

3.5 Μελέτη γραμμής μέτρησης

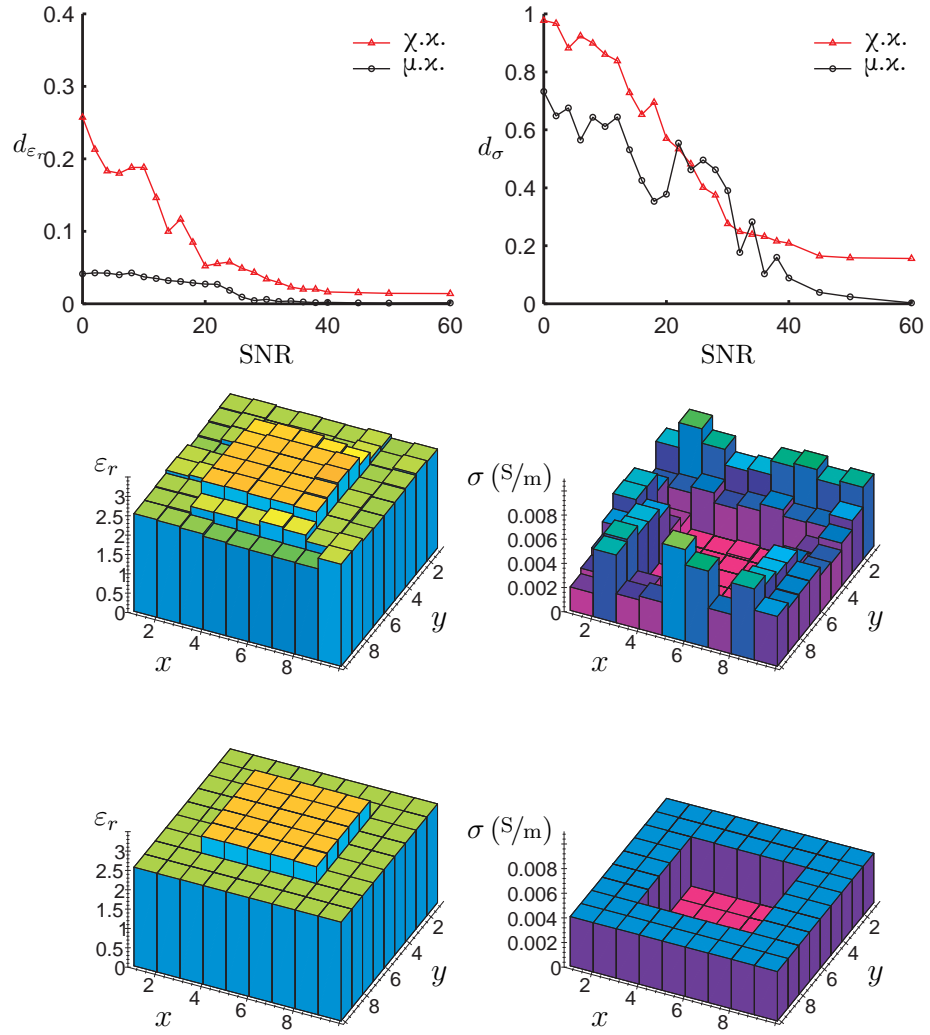
Ομάδα αποτελεσμάτων 1 Θεωρούμε ότι η γραμμή μέτρησης έχει μήκος $L_M = 1.5\text{ m}$ και μεταβάλλουμε τον αριθμό N_M – και, εμμέσως, την απόσταση Δ_M , αφού $L_M = (N_M - 1)\Delta_M$ – των σημείων εκπομπής/μέτρησης. Χρησιμοποιούμε $N_F = 5$ συχνότητες στην περιοχή 0.3–1.3 GHz (Σχήμα 3.3 σελίδα 39 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.4 σελίδα 40 με κανονικοποίηση).⁴

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι, για την περίπτωση που δεν έχουμε θόρυβο, η αύξηση του αριθμού των σημείων μέτρησης δε βελτιώνει απαραίτητα την ποιότητα της ανακατασκευής. Υπάρχει μία βέλτιστη ποσότητα πληροφορίας η οποία οδηγεί στα καλύτερα αποτελέσματα. Όταν όμως το σκεδασμένο πεδίο περιέχει θόρυβο, τότε τα αποτελέσματα βελτιώνονται σταθερά όσο αυξάνουμε τα διαθέσιμα δεδομένα. Παρατηρούμε μάλιστα ότι υπάρχει μια τάση σύγκλισης των αποτελεσμάτων με και χωρίς θόρυβο όσο αυξάνεται ο αριθμός των σημείων εκπομπής/μέτρησης. Θα επανέρθουμε σε αυτή την παρατήρηση στην ενότητα των συμπερασμάτων, στο τέλος του κεφαλαίου.

Η δεύτερη παρατήρηση, η οποία ισχύει για όλα τα αποτελέσματα, είναι η σημαντικότερη συνεισφορά της κανονικοποίησης στην ποιότητα της ανακατασκευής.

Εξετάζοντας τις ανακατασκευές με τη μεγαλύτερη ισχύ θορύβου, $\text{SNR} = 30\text{ dB}$, παίρνουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα για $N_M \geq 21$, ανεξαρτήτως κανονικοποίησης. Παρουσιάζουμε τα προφίλ ανακατασκευής για $N_M = 13$ και

⁴Για λόγους που σχετίζονται με τον αλγόριθμο της μεθόδου απεικόνισης, ο αριθμός των σημείων εκπομπής και μέτρησης είναι περιττός και η μεταξύ τους απόσταση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μεγέθους των κυψελών, δηλαδή $\Delta_M = p\Delta_x$.



Σχήμα 3.2: Αποτελέσματα ανακατασκευής με κανονικοποίηση (μ.κ.) και χωρίς (χ.κ.), συναρτήσει του πηλίκου σήματος προς θόρυβο. Προφίλ για ανακατασκευή με κανονικοποίηση, SNR = 20 dB (πάνω), SNR = 90 dB (κάτω).

$N_M = 21$. Χωρίς κανονικοποίηση (Σχήμα 3.3), η ανακατασκευή τής διηλεκτρικής σταθεράς βελτιώνεται καθώς αυξάνουμε το N_M , ενώ εκείνη τής αγωγιμότητας μένει σταθερή. Για την αντίστοιχη μεταβολή με κανονικοποίηση (Σχήμα 3.4), η διηλεκτρική σταθερά τής γωνιακής κυψέλης στην κάτω πλευρά τού αντικειμένου χάνει σε ποιότητα, αλλά συνολικά όλο το αντικείμενο ανακατασκευάζεται σωστά, ενώ η αγωγιμότητα βελτιώνεται αισθητά.

Θεωρούμε βέλτιστη τιμή $N_M = 21$ (η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε $\Delta_M = 3\Delta_x = 7.5\text{ cm}$). Για μικρότερα N_M , τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά. Από την άλλη πλευρά, αν αυξήσουμε το N_M πέρα από αυτή την τιμή, η βελτίωση στην ανακατασκευή δε δικαιολογεί την αύξηση στο χρόνο υπολογισμού: με κανονικοποίηση, χρειάζονται 18 min για $N_M = 21$ και 34 min για $N_M = 31$.⁵

Ομάδα αποτελεσμάτων 2 Μικραίνουμε το μήκος τής γραμμής μέτρησης, $L_M = 1\text{ m}$, και μεταβάλλουμε το πλήθος των σημείων εκπομπής/μέτρησης. Χρησιμοποιούμε $N_F = 5$ συχνότητες στην περιοχή 0.3 – 1.3 GHz (Σχήμα 3.5 σελίδα 41 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.6 σελίδα 42 με κανονικοποίηση).

Σ' αυτή την περίπτωση, τα καλύτερα αποτελέσματα παρουσία θορύβου είναι για $N_M \geq 21$. Παρουσιάζουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα για $N_M = 21$ και $N_M = 41$ με $\text{SNR} = 30\text{ dB}$. Βλέπουμε ότι η διαφορά είναι μικρή, και σίγουρα δε δικαιολογεί την αύξηση στο χρόνο υπολογισμού, από 18 min για $N_M = 21$ σε 58 min για $N_M = 41$ και χρήση κανονικοποίησης.

Συγκρίνοντας τα δύο μήκη τής γραμμής μέτρησης για τον ίδιο αριθμό σημείων, συμπεραίνουμε ότι υπερτερεί η μεγαλύτερη γραμμή. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η μέτρηση τού σκεδαζόμενου πεδίου σε μεγαλύτερη έκταση δίνει περισσότερη πληροφορία στον αλγόριθμο ανακατασκευής. Αντίστοιχα, όταν οι κεραίες εκπομπής καλύπτουν μεγαλύτερη έκταση, η αλληλεπίδραση τού πεδίου με το σκεδαστή στις διάφορες προσπτώσεις περιέχει μεγαλύτερο ποσό πληροφορίας. Υπάρχει, βέβαια, ένα άνω όριο για το μήκος τής γραμμής μέτρησης: οι κεραίες εκπομπής πρέπει να είναι αρκετά κοντά στο χώρο έρευνας ώστε το προσπίπτον πεδίο να αλληλεπιδρά με τα αντικείμενα. Κατά τον ίδιο τρόπο, αν τα σημεία μέτρησης είναι πολύ απομακρυσμένα, το μετρούμενο σκεδαζόμενο πεδίο θα είναι πολύ ασθενές και δε θα περιέχει πληροφορία για το άγνωστο αντικείμενο.

Με βάση τις παραπάνω διαπιστώσεις, για το υπόλοιπο τού κεφαλαίου χρη-

⁵ Χρησιμοποιήθηκε σταθμός εργασίας Hewlett-Packard Visualize B2000, με επεξεργαστή RISC PA-8500 400 MHz. Το ποσό τής απαιτούμενης φυσικής μνήμης είναι 50 MB.

σιμοποιούμε:

$$L_M = 1.5 \text{ m}$$

$$N_M = 21.$$

3.6 Μελέτη αριθμού συχνοτήτων

Ομάδα αποτελεσμάτων 3 Επιλέγουμε ολόκληρη τη διαθέσιμη περιοχή συχνοτήτων, $0.3 - 1.3 \text{ GHz}$, και μεταβάλλουμε το πλήθος N_F των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων μέσα στην περιοχή αυτή (Σχήμα 3.7 σελίδα 43 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.8 σελίδα 44 με κανονικοποίηση).

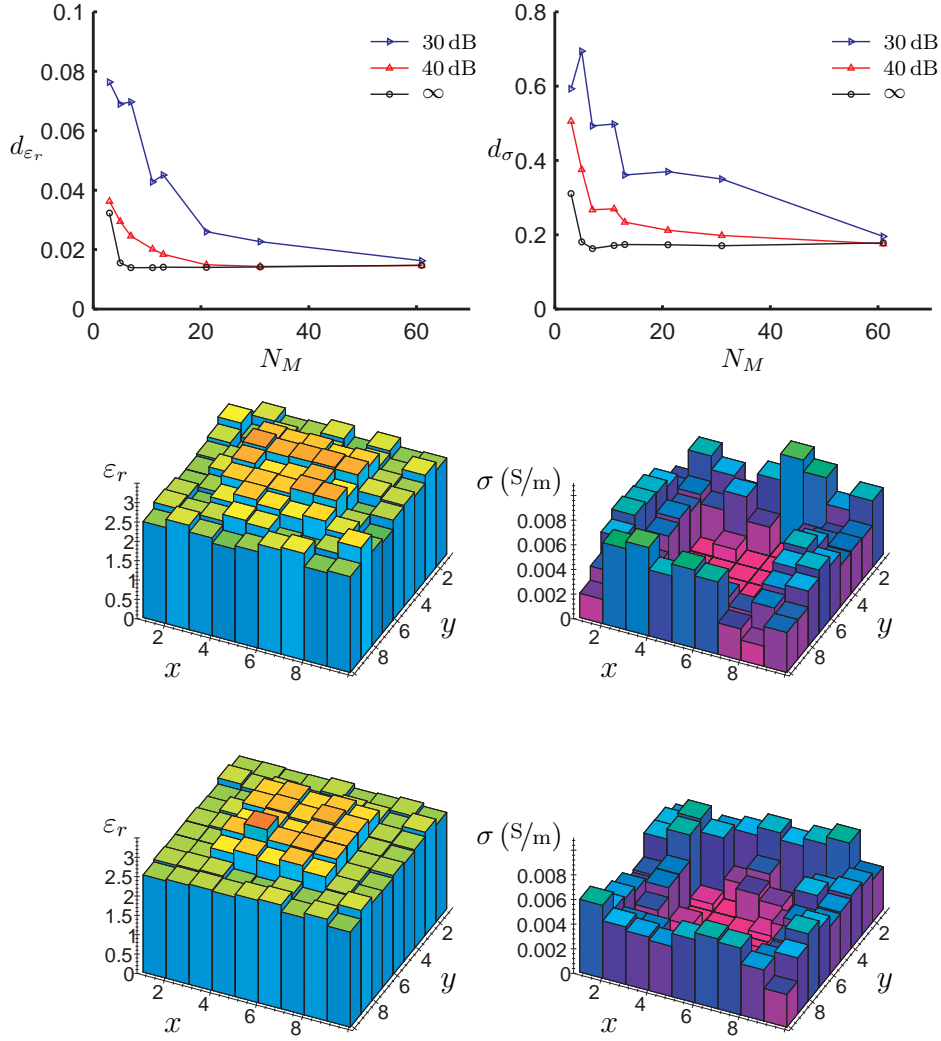
Για ανακατασκευή χωρίς κανονικοποίηση και λόγο σήματος προς θόρυβο 30 dB , έχουμε τα καλύτερα αποτελέσματα στην αγωγιμότητα για $N_F = 21, 11$ και 5 συχνότητες. Παρουσιάζουμε συγκριτικά τα προφίλ για $N_F = 5, 11$ (Σχήμα 3.7) όπου βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά. Όταν χρησιμοποιούμε κανονικοποίηση, τα αποτελέσματα για τη διηλεκτρική σταθερά είναι πολύ καλά, ανεξαρτήτως από τον αριθμό των συχνοτήτων. Η βέλτιστη τιμή για την ανακατασκευή της αγωγιμότητας είναι $N_F = 6$, με χρόνο υπολογισμού 20 min . Περαιτέρω αύξηση του αριθμού συχνοτήτων απαιτεί χρόνους 40 min ($N_F = 11$) και 80 min ($N_F = 21$). Παρατηρούμε ότι για τις χαμηλότερες στάθμες θορύβου τα αποτελέσματα μεταβάλλονται λίγο σε σχέση με τον αριθμό συχνοτήτων, με τις λιγότερες συχνότητες να δίνουν ελαφρώς καλύτερες ανακατασκευές.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι έχουμε ικανοποιητική ποιότητα ανακατασκευής για $N_F = 5$. Για $N_F = 3$ παίρνουμε αρκετά καλά αποτελέσματα στο μισό σχεδόν χρόνο, ενώ για $N_F = 6$ βελτιώνουμε την ανακατασκευή με μικρή αύξηση του χρόνου υπολογισμού.

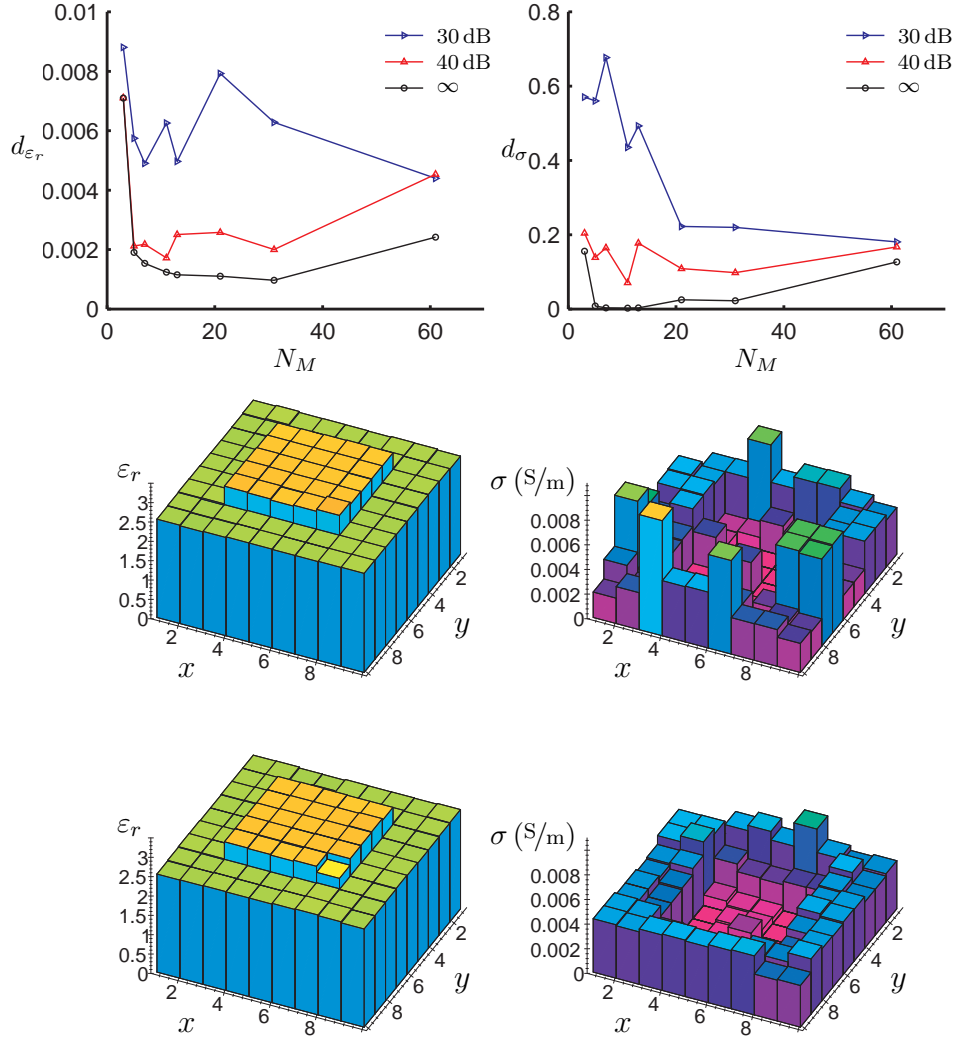
3.7 Μελέτη περιοχής συχνοτήτων

Ομάδα αποτελεσμάτων 4 Επιλέγουμε την κατώτερη συχνότητα $f_{min} = 0.3 \text{ GHz}$. Χρησιμοποιούμε $N_F = 3$ συχνότητες και μεταβάλλουμε την ανώτερη συχνότητα f_{max} (Σχήμα 3.9 σελίδα 45 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.10 σελίδα 46 με κανονικοποίηση).

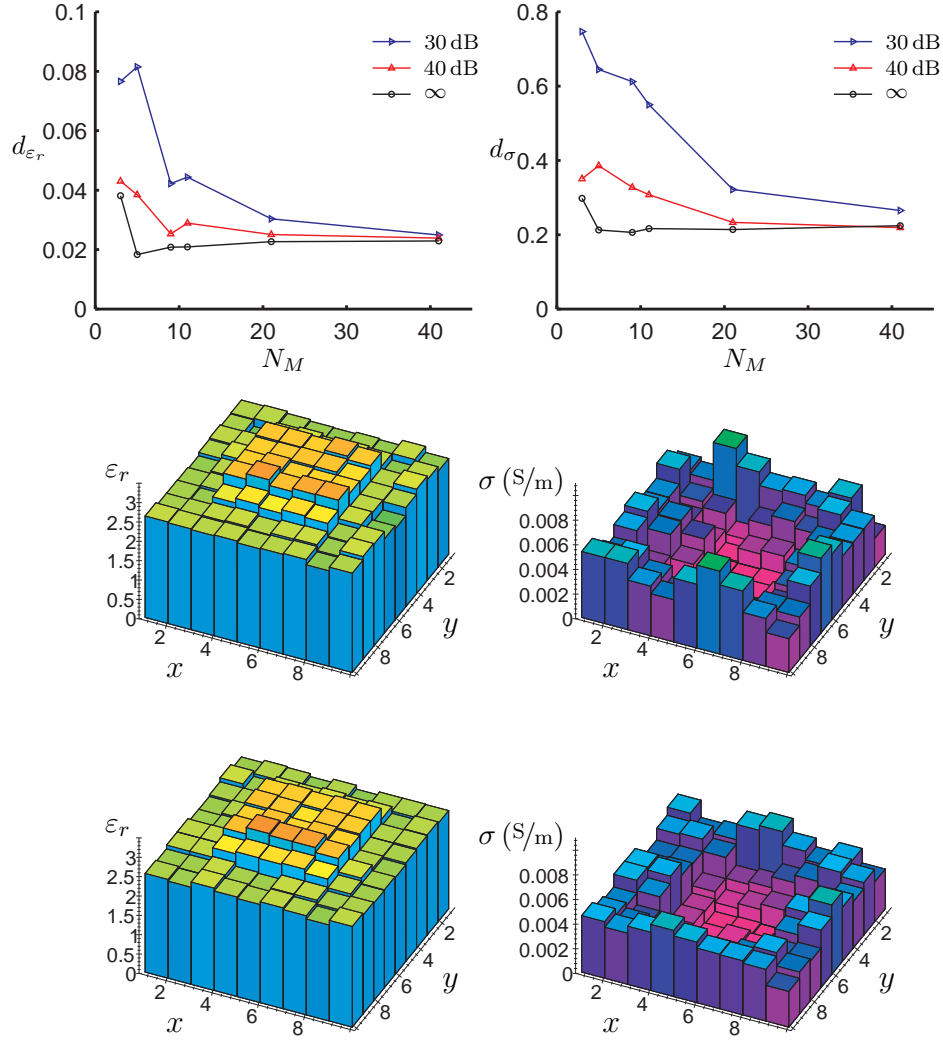
Ανεξαρτήτως κανονικοποίησης και θορύβου, η αύξηση του εύρους ζώνης συχνοτήτων οδηγεί γενικά σε καλύτερα αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι για την περιοχή $0.3 - 0.7 \text{ GHz}$, η κανονικοποίηση δε βελτιώνει καθόλου την ανακατασκευή της αγωγιμότητας.



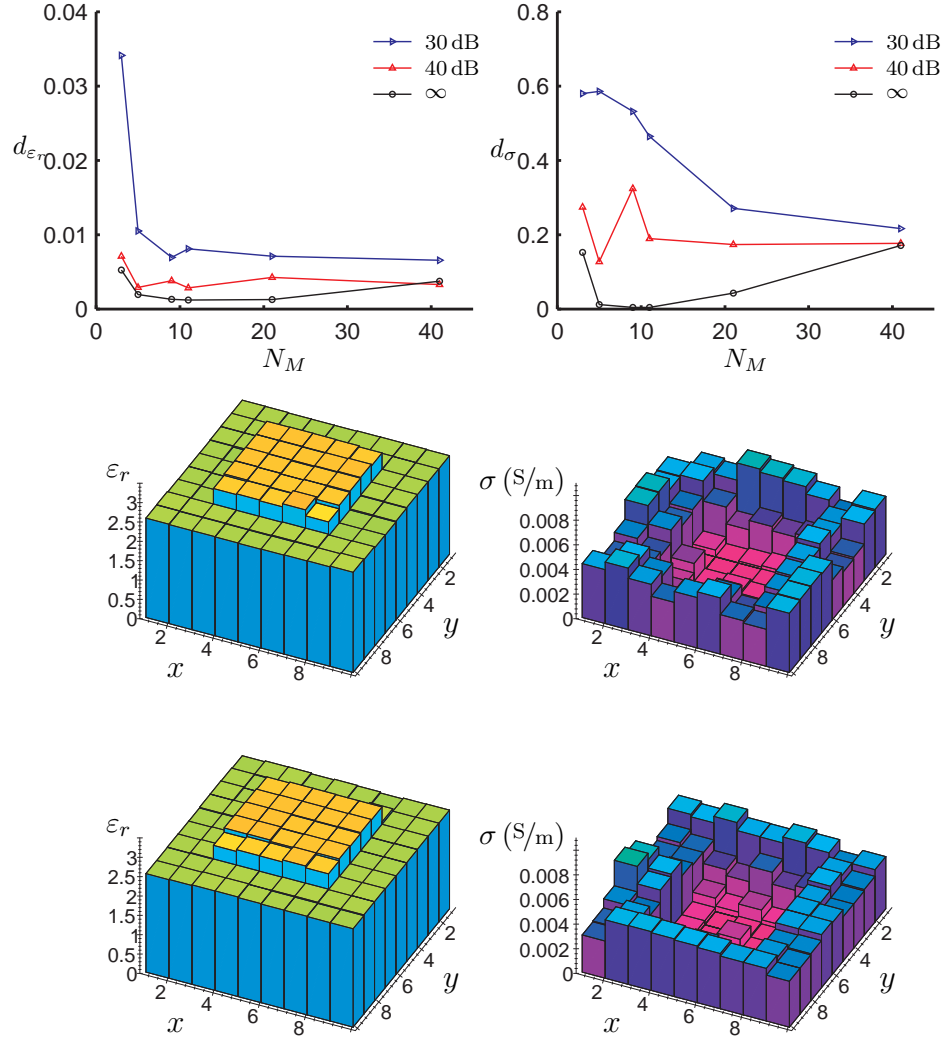
Σχήμα 3.3: Ομάδα αποτελεσμάτων 1. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 7, 11, 13, 21, 31, 61\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1.5$ m. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_M = 13$ (πάνω), $N_M = 21$ (κάτω).



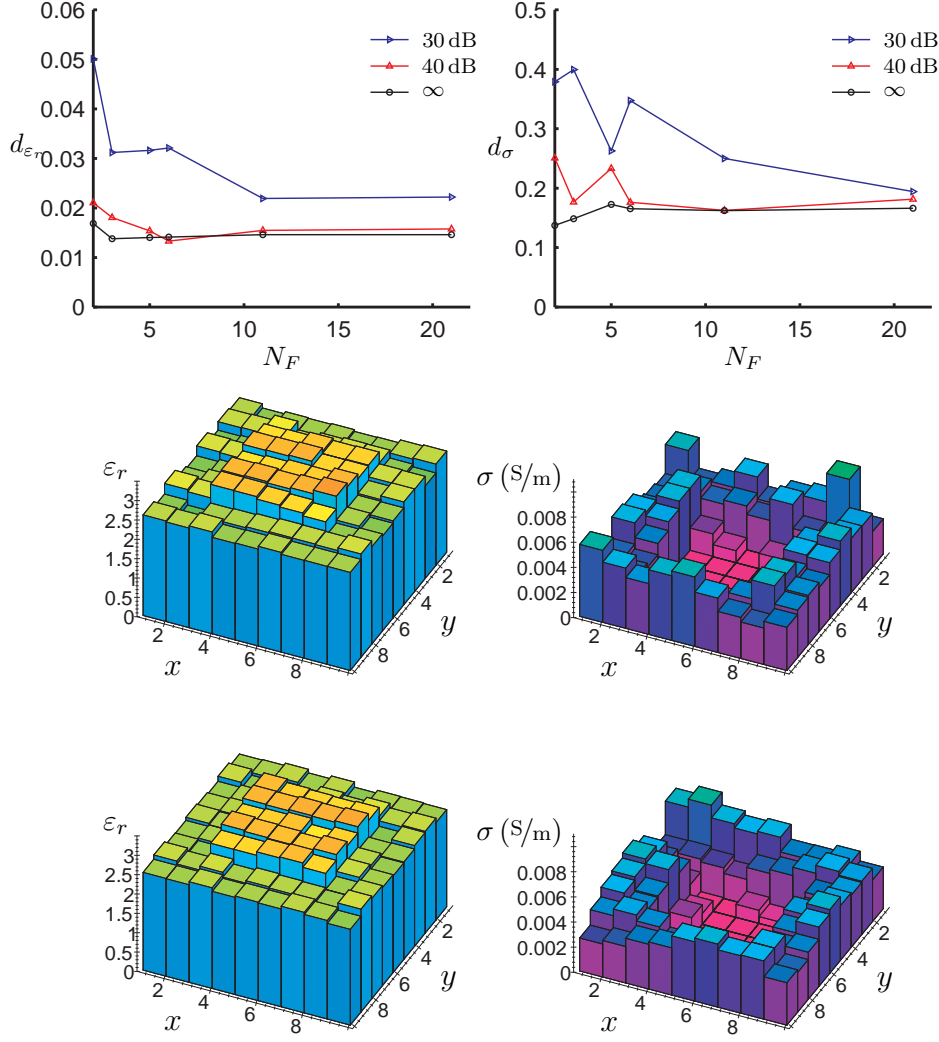
Σχήμα 3.4: Ομάδα αποτελεσμάτων 1. Μεταβολή του αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 7, 11, 13, 21, 31, 61\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1.5$ m. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_M = 13$ (πάνω), $N_M = 21$ (κάτω).



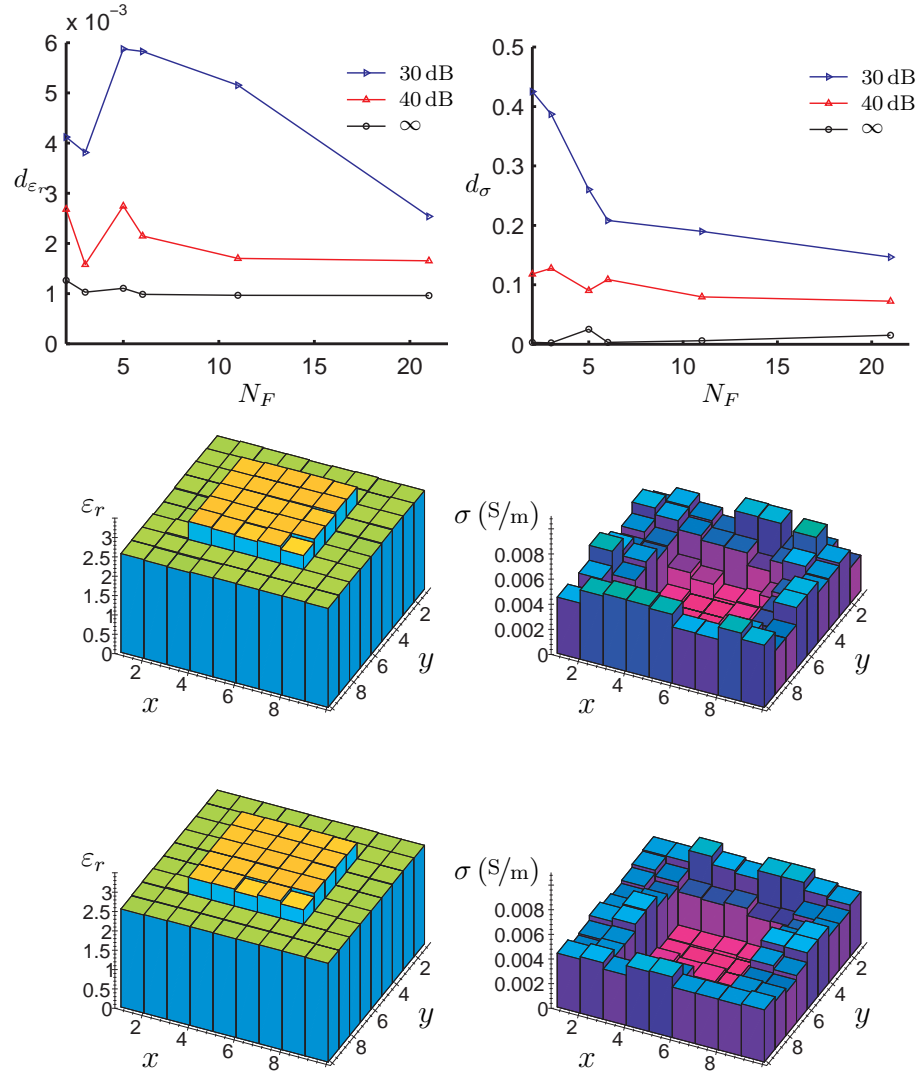
Σχήμα 3.5: Ομάδα αποτελεσμάτων 2. Μεταβολή τού αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 9, 11, 21, 41\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1$ m. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_M = 21$ (πάνω), $N_M = 41$ (κάτω).



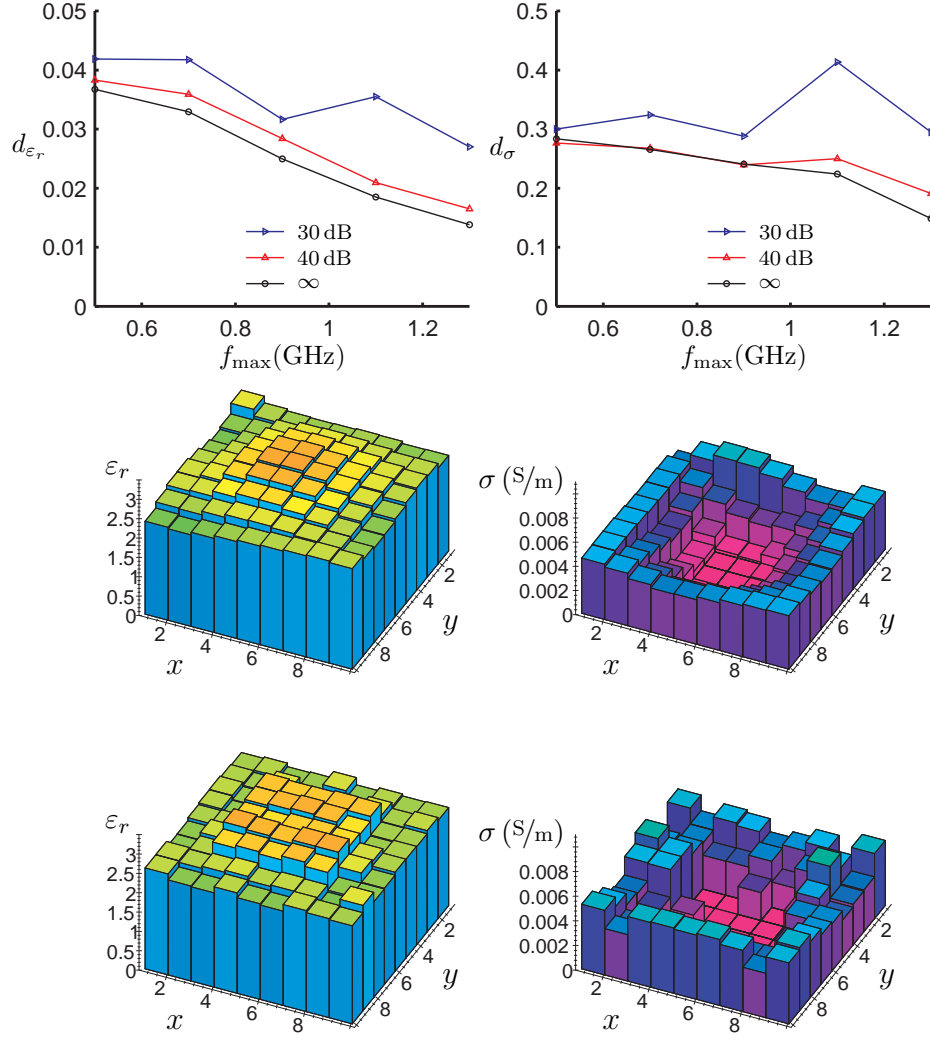
Σχήμα 3.6: Ομάδα αποτελεσμάτων 2. Μεταβολή του αριθμού των σημείων εκπομπής/μέτρησης ($N_M \in \{3, 5, 9, 11, 21, 41\}$) για σταθερό μήκος γραμμής μέτρησης $L_M = 1$ m. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_M = 21$ (πάνω), $N_M = 41$ (κάτω).



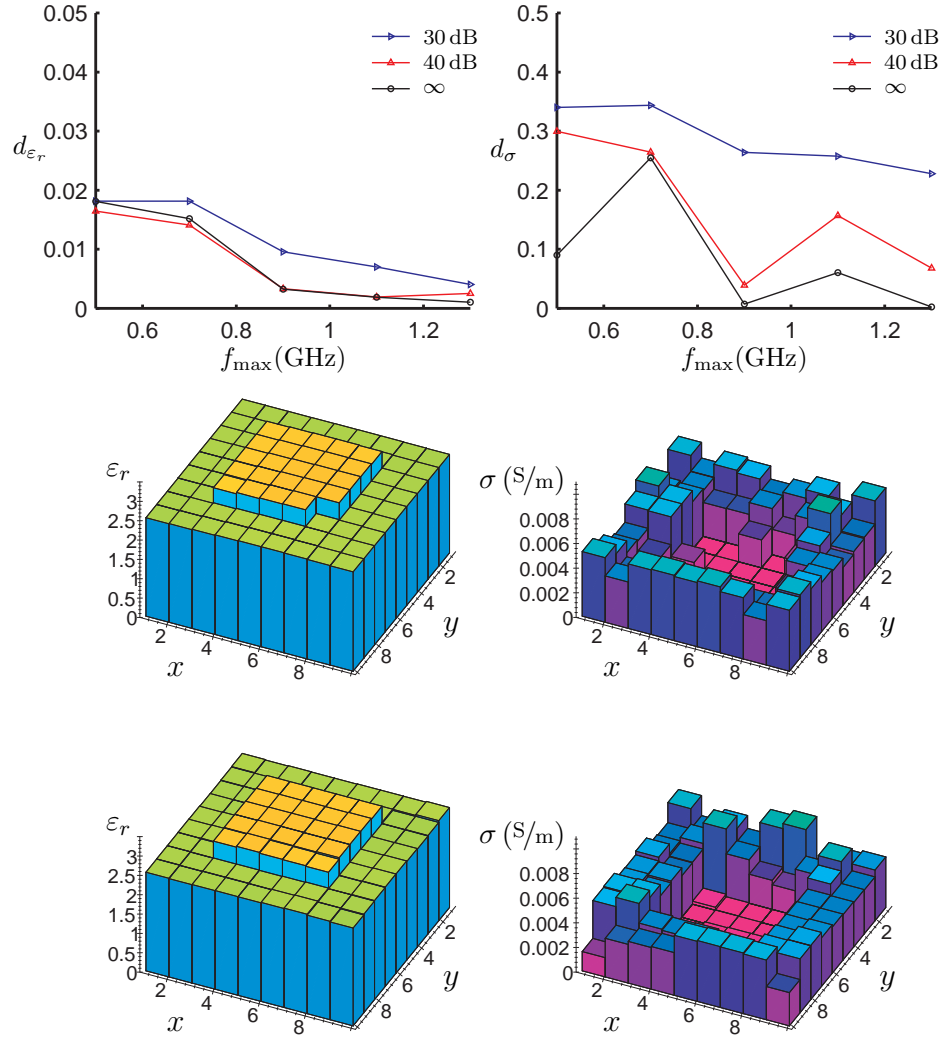
Σχήμα 3.7: Ομάδα αποτελεσμάτων 3. Μεταβολή του αριθμού συχνοτήτων ($N_F \in \{2, 3, 5, 6, 11, 21\}$) για σταθερή περιοχή συχνοτήτων 0.3 – 1.3 GHz. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $N_F = 5$ (πάνω), $N_F = 11$ (κάτω).



Σχήμα 3.8: Ομάδα αποτελεσμάτων 3. Μεταβολή του αριθμού συχνοτήτων ($N_F \in \{2, 3, 5, 6, 11, 21\}$) για σταθερή περιοχή συχνοτήτων $0.3 - 1.3$ GHz. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30$ dB, $N_F = 5$ (πάνω), $N_F = 11$ (κάτω).



Σχήμα 3.9: Ομάδα αποτελεσμάτων 4. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.10: Ομάδα αποτελεσμάτων 4. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30$ dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).

Ομάδα αποτελεσμάτων 5 Επιλέγουμε την κατώτερη συχνότητα $f_{min} = 0.3$ GHz. Χρησιμοποιούμε $N_F = 5$ συχνότητες και μεταβάλλουμε την ανώτερη συχνότητα f_{max} (Σχήμα 3.11 σελίδα 48 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.12 σελίδα 49 με κανονικοποίηση).

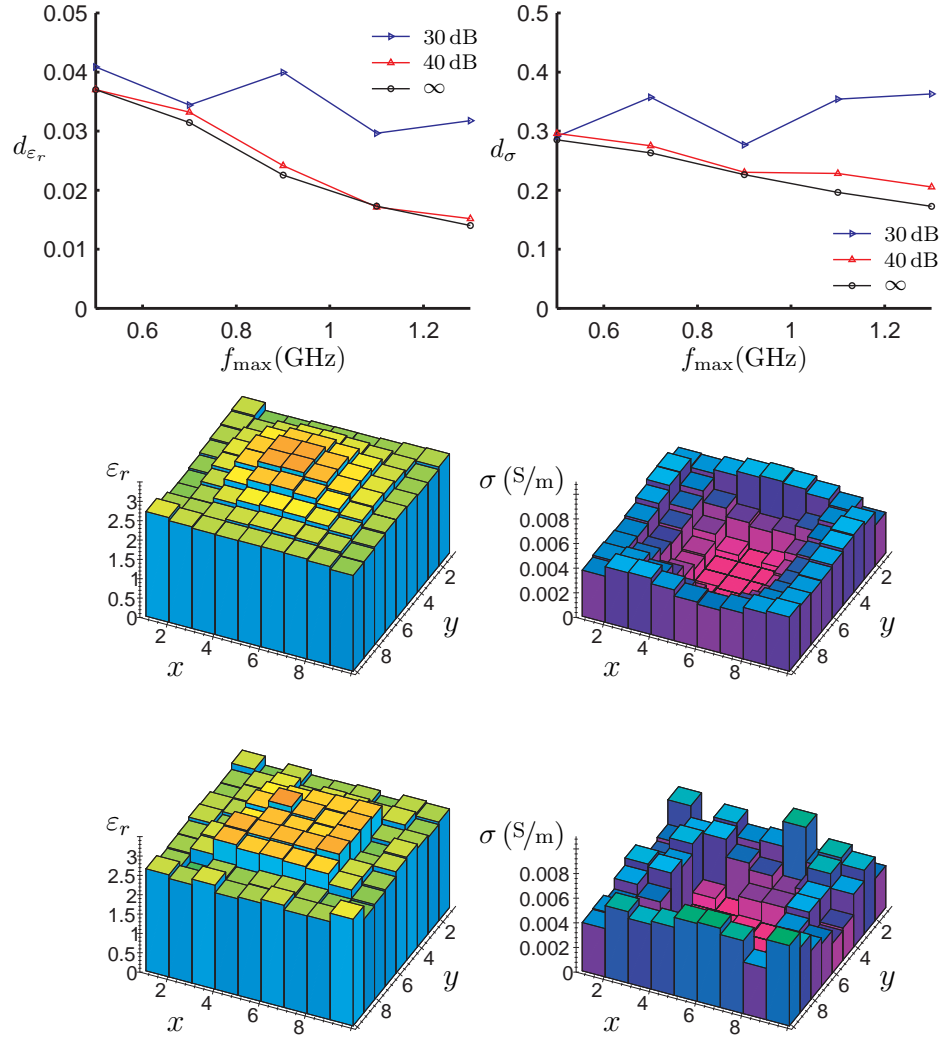
Παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά με προηγούμενως: ανεξαρτήτως κανονικοποίησης και θορύβου, τα αποτελέσματα βελτιώνονται όσο μεγαλώνει το εύρος ζώνης.

Για ανακατασκευή χωρίς θόρυβο στην περιοχή $0.3 - 0.7$ GHz, η κανονικοποίηση δε βελτιώνει καθόλου τα αποτελέσματα τής αγωγιμότητας. Βλέπουμε ότι υπάρχουν συγκεκριμένες συχνότητες οι οποίες δεν αλληλεπιδρούν επαρκώς με το άγνωστο αντικείμενο. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, πρόκειται για την περιοχή γύρω από τα 0.7 GHz. Αυτό δείχνει την ευαισθησία τής μεθόδου στην επιλογή των συχνοτήτων.

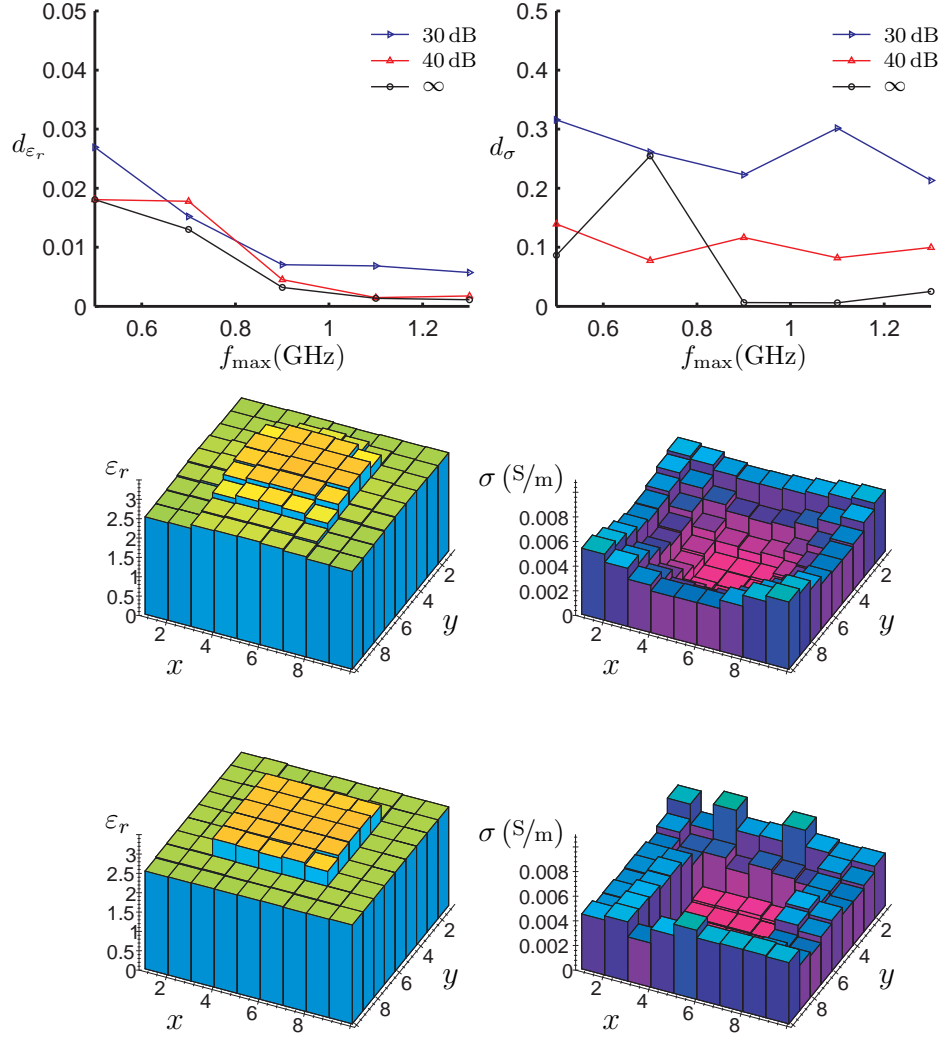
Αν συγκρίνουμε σημείο προς σημείο τα αποτελέσματα για $N_F = 3$ και $N_F = 5$, έχουμε μια μελέτη τού αριθμού συχνοτήτων, όπως η ομάδα αποτελεσμάτων 3 τής προηγούμενης παραγράφου, αλλά αυτή τη φορά για διάφορες ζώνες συχνοτήτων. Επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά αν αυξήσουμε τον αριθμό συχνοτήτων και κρατήσουμε σταθερό το εύρος ζώνης. Ανατρέχοντας στις τιμές των αποτελεσμάτων, μπορούμε να δούμε ότι, αν και στα πιο πολλά σημεία έχουμε καλύτερα αποτελέσματα με $N_F = 5$, η διαφορά δεν είναι σημαντική.

Ομάδα αποτελεσμάτων 6 Επιλέγουμε το εύρος τής περιοχής συχνοτήτων σταθερό, $f_{max} - f_{min} = 0.2$ GHz όπως και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων, $N_F = 3$. Σαρώνουμε με αυτό το παράθυρο συχνοτήτων την περιοχή $0.3 - 1.3$ GHz, αυξάνοντας την κεντρική συχνότητα $f_0 = 0.5(f_{min} + f_{max})$ κατά 0.1 GHz. (Σχήμα 3.13 σελίδα 50 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.14 σελίδα 51 με κανονικοποίηση).

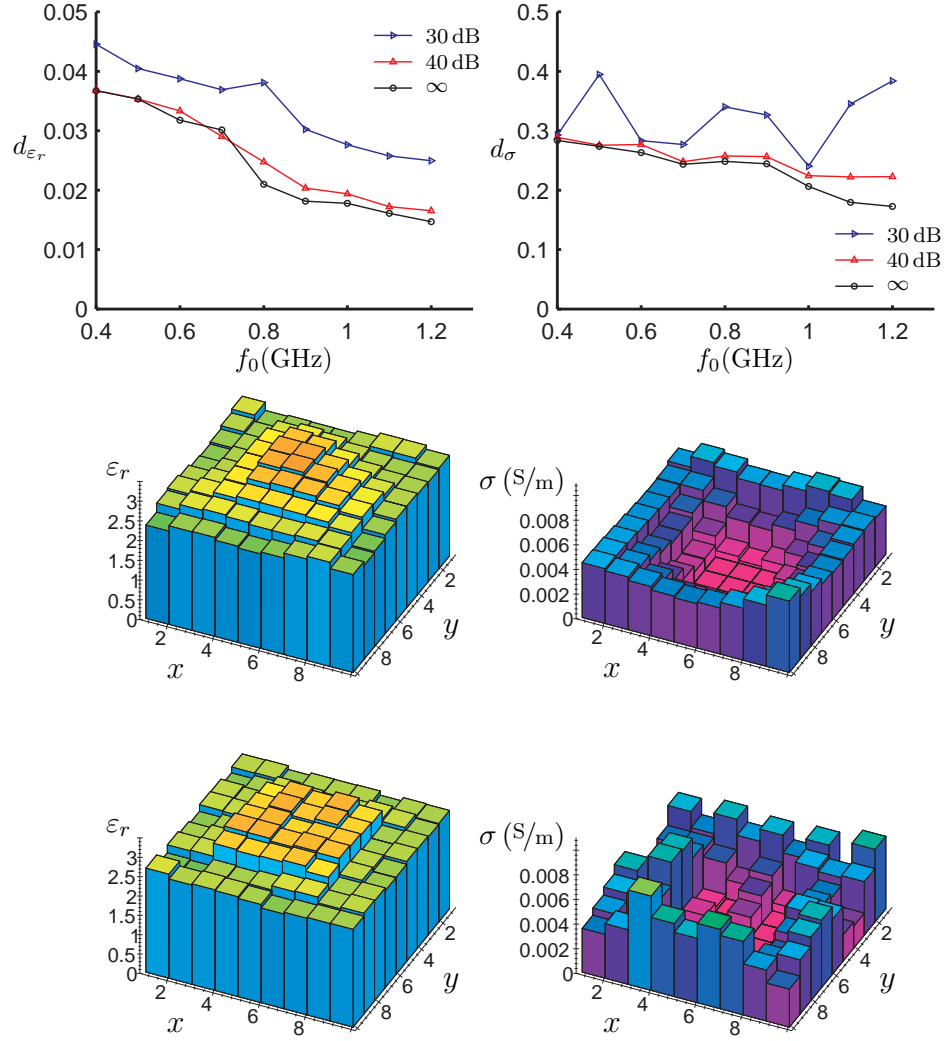
Η ποιότητα ανακατασκευής γενικά βελτιώνεται καθώς χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες συχνότητες, όμως παραμένει χειρότερη από την περίπτωση ανακατασκευής με χρήση και χαμηλών συχνοτήτων (ομάδα αποτελεσμάτων 4). Επιπλέον, για τις ανακατασκευές τής αγωγιμότητας με λόγο σήματος προς θόρυβο 30 dB, καθώς αυξάνουμε τη συχνότητα δεν υπάρχει σύγκλιση των αποτελεσμάτων με τις υπόλοιπες καμπύλες. Τα παραπάνω είναι σε συμφωνία με το ως τώρα συμπέρασμα ότι μεγαλύτερο εύρος ζώνης οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα.



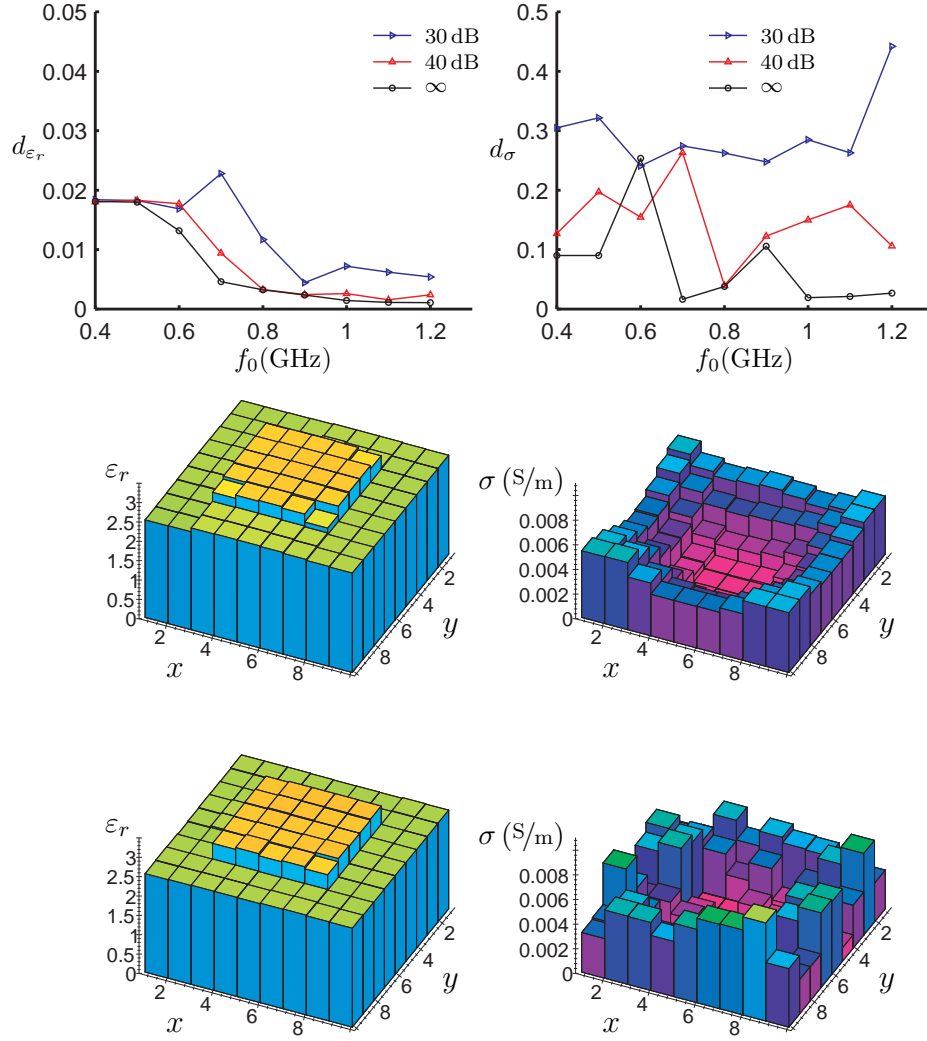
Σχήμα 3.11: Ομάδα αποτελεσμάτων 5. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 5$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.12: Ομάδα αποτελεσμάτων 5. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 5$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.13: Ομάδα αποτελεσμάτων 6. Μεταβολή της κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_0 = 0.4$ GHz (πάνω), $f_0 = 1.2$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.14: Ομάδα αποτελεσμάτων 6. Μεταβολή τής κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2$ GHz και αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_0 = 0.4$ GHz (πάνω), $f_0 = 1.2$ GHz (κάτω).

3.8 Τεχνικές μεταλλαγής συχνότητας

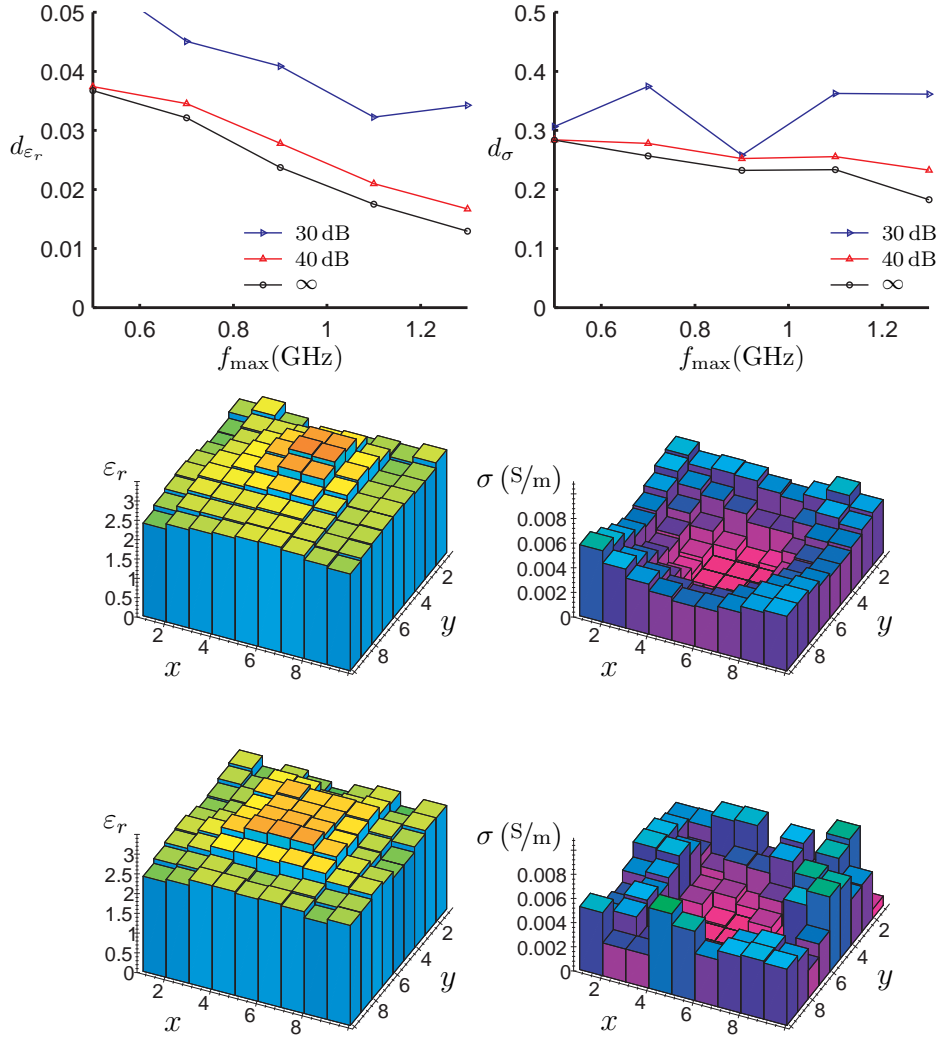
Είδαμε στην ομάδα αποτελεσμάτων 6 ότι η χρήση αποκλειστικά υψηλών συχνοτήτων οδηγεί σε καλά αποτελέσματα, κυρίως για τη διηλεκτρική σταθερά. Τα αποτελέσματα αυτά υστερούν όμως σε σχέση με εκείνα που προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε όλη τη διαθέσιμη ζώνη. Από την άλλη πλευρά, η χρήση αποκλειστικά χαμηλών συχνοτήτων δε δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι χρειάζεται ένας συνδυασμός χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων.

Βασισμένοι στα συμπεράσματα των Chew and Lin (1995) και στα εκτεταμένα αριθμητικά πειράματα του Ferrayé (2002) για μονοσυχνοτικές ανακατασκευές, προτείνουμε εδώ μια τεχνική μεταλλαγής πολλαπλών συχνοτήτων (*multifrequency hopping*). Η ιδέα έγκειται στη διαδοχική επίλυση τού ίδιου αντίστροφου προβλήματος, με διαρκώς υψηλότερες συχνότητες, όπου το αποτέλεσμα μιας επίλυσης αποτελεί σημείο εκκίνησης για την επόμενη. Παρουσιάζουμε δυο συγκεκριμένους τρόπους επιλογής συχνοτήτων, με βάση τις δύο τελευταίες ομάδες αποτελεσμάτων.

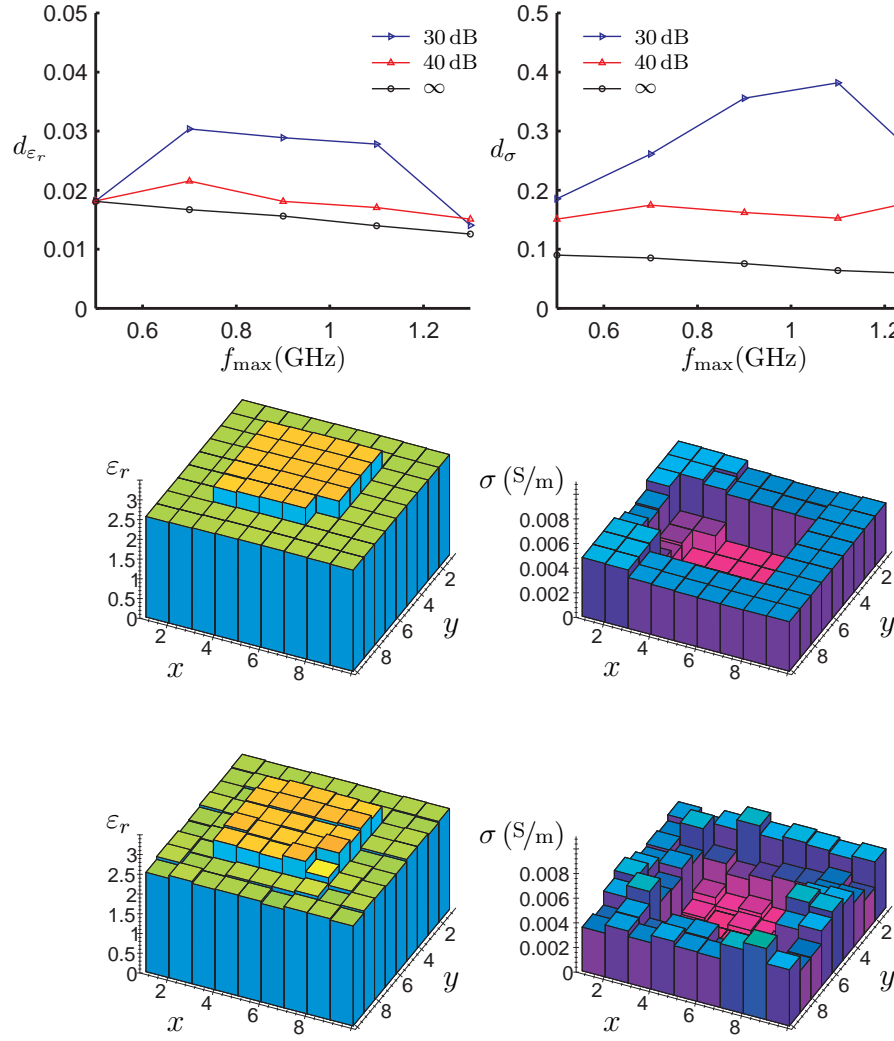
Ομάδα αποτελεσμάτων 7 Επιλέγουμε την κατώτερη συχνότητα $f_{min} = 0.3 \text{ GHz}$. Χρησιμοποιούμε $N_F = 3$ συχνότητες και αυξάνουμε την ανώτερη συχνότητα f_{max} από 0.5 GHz ως 1.3 GHz με βήμα 0.2 GHz . Τα αποτελέσματα κάθε ανακατασκευής χρησιμοποιούνται ως αρχική εκτίμηση για την επόμενη. Για τη χαμηλότερη περιοχή συχνοτήτων, θεωρούμε μηδενική αρχική εκτίμηση (Σχήμα 3.15 σελίδα 53 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.16 σελίδα 54 με κανονικοποίηση). Πρόκειται για επέκταση της Ομάδας αποτελεσμάτων 4 στην περίπτωση μεταλλαγής συχνοτήτων.

Ομάδα αποτελεσμάτων 8 Επιλέγουμε το εύρος της περιοχής συχνοτήτων σταθερό, $f_{max} - f_{min} = 0.2 \text{ GHz}$ όπως και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων, $N_F = 3$. Σαρώνουμε με αυτό το παράθυρο συχνοτήτων την περιοχή $0.3 - 1.3 \text{ GHz}$, αυξάνοντας την κεντρική συχνότητα $f_0 = 0.5(f_{min} + f_{max})$ κατά 0.1 GHz . Τα αποτελέσματα κάθε ανακατασκευής χρησιμοποιούνται ως αρχική εκτίμηση για την επόμενη. Για τη χαμηλότερη περιοχή συχνοτήτων, θεωρούμε μηδενική αρχική εκτίμηση (Σχήμα 3.17 σελίδα 56 χωρίς κανονικοποίηση, Σχήμα 3.18 σελίδα 57 με κανονικοποίηση). Πρόκειται για επέκταση της Ομάδας αποτελεσμάτων 6 στην περίπτωση μεταλλαγής συχνοτήτων.

Συγκρίνουμε τις ομάδες αποτελεσμάτων με μεταλλαγή συχνότητας με τις αντίστοιχες χωρίς μεταλλαγή (την 7 με την 4 και την 8 με την 6). Για ανακατασκευή με μεταλλαγή συχνότητας χωρίς κανονικοποίηση, δεν παρατηρούμε



Σχήμα 3.15: Ομάδα αποτελεσμάτων 7. Μεταβολή τής ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.16: Ομάδα αποτελεσμάτων 7. Μεταβολή της ανώτερης συχνότητας f_{\max} για σταθερή κατώτατη συχνότητα $f_{\min} = 0.3$ GHz, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30$ dB, $f_{\max} = 0.5$ GHz (πάνω), $f_{\max} = 1.3$ GHz (κάτω).

βελτίωση των τελικών αποτελεσμάτων, δηλαδή των αποτελεσμάτων που χρησιμοποιούν τις υψηλότερες συχνότητες. Για τις ενδιάμεσες περιπτώσεις, βλέπουμε ότι το σφάλμα μειώνεται μονοτονικά για την περίπτωση χωρίς θόρυβο και δεν παρουσιάζει πλέον διακυμάνσεις. Για στάθμη θορύβου $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, η ποιότητα των ανακατασκευών που παρουσιάζουμε εδώ επηρεάζεται αρνητικά από τη χρήση μεταλλαγής συχνότητας.

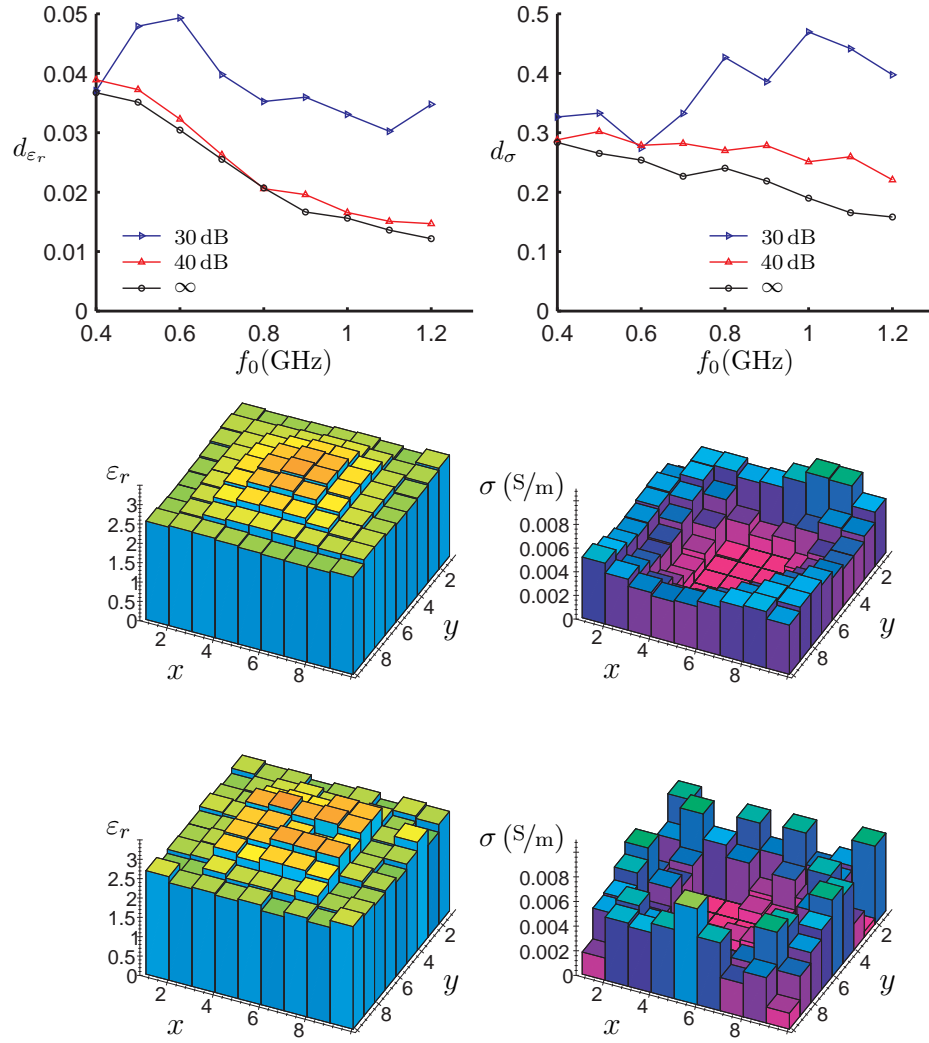
Όταν χρησιμοποιούμε κανονικοποίηση, η μεταλλαγή συχνότητας έχει πάντα αρνητική επίδραση στα αποτελέσματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ανακατασκευή σε χαμηλότερη συχνότητα δίνει μια λύση ήδη χωρισμένη σε ομοιογενείς ζώνες με ασυνέχειες. Στη συνέχεια, η κανονικοποίηση δεν επιτρέπει σε αυτές τις ζώνες να αλλάξουν μορφή, με αποτέλεσμα τα λάθη που προκύπτουν από την αρχική επίλυση τού προβλήματος να παραμένουν και στις υψηλότερες συχνότητες.

3.9 Συμπεράσματα

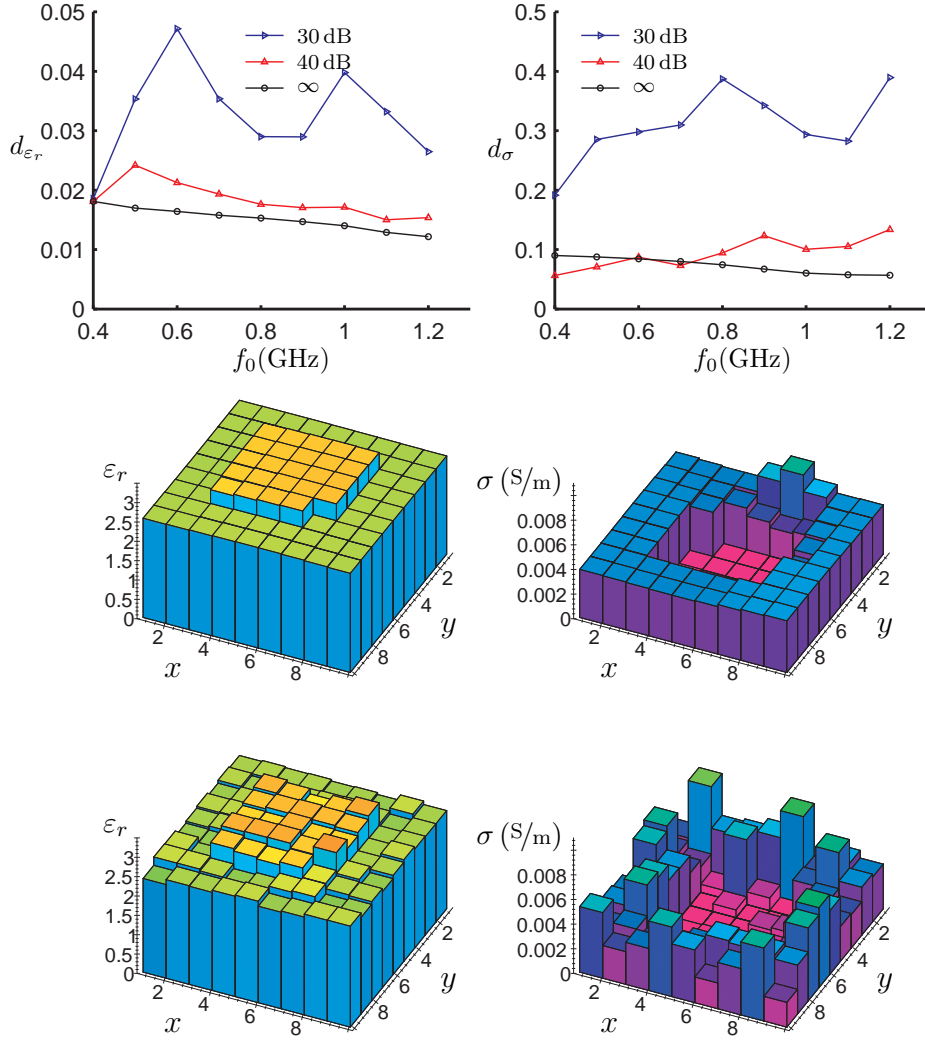
Παρουσιάσαμε δύο επεκτάσεις τής μεθόδου μικροκυματικής απεικόνισης τού προηγούμενου κεφαλαίου. Με τις βελτιώσεις αυτές, η διαδικασία ανακατασκευής παίρνει υπόψη το πραγματικό ακτινοβολούμενο κοντινό πεδίο των κεραίων και ο μετρητικός θόρυβος μοντελοποιείται κατάλληλα. Στη συνέχεια παραθέσαμε μια σειρά αποτελεσμάτων ανακατασκευής μιας μη ομογενούς περιοχής τού χώρου, βασισμένοι σε συνθετικά δεδομένα σκέδασης.

Δείξαμε ότι ο αλγόριθμος ανακατασκευής χρειάζεται μια βέλτιστη ποσότητα πληροφορίας σχετικά με το άγνωστο αντικείμενο. Η πληροφορία αυτή παρέχεται από το σκεδαζόμενο πεδίο, με τη χρήση πολλαπλών συχνοτήτων, σημείων εκπομπής και σημείων μέτρησης. Για την περίπτωση δεδομένων σκέδασης χωρίς θόρυβο, η αύξηση τής διαθέσιμης πληροφορίας δεν οδηγεί πάντα σε καλύτερα αποτελέσματα. Όταν όμως προστεθεί θόρυβος, ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται καλύτερα καθώς αυξάνουμε τον όγκο των δεδομένων· για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν εδώ, το άνω όριο τέθηκε με βάση τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού.

Μελετήσαμε τα χαρακτηριστικά τής γραμμής μέτρησης και δείξαμε ότι πρέπει να έχει επαρκές μήκος ώστε να συλλέγεται όλη η διαθέσιμη πληροφορία για το σκεδαζόμενο πεδίο. Υπάρχει ένας βέλτιστος αριθμός σημείων εκπομπής/λήψης, ο οποίος για τα προβλήματα που μελετήσαμε κυμαίνεται γύρω στο είκοσι, μια τιμή που οδηγεί σε λογικούς χρόνους υπολογισμού. Επίσης, αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με το μετρητικό σύστημα που αναπτύχθηκε στα πλαίσια τής εργασίας τού Guillon et al. (2001). (Πρόκειται για ένα σύστημα βασισμένο σε στοιχειοκεραία, επεκτάσιμο ανά ομάδες των οκτώ κεραίων· ολόκληρη η διαδικασία μέτρησης



Σχήμα 3.17: Ομάδα αποτελεσμάτων 8. Μεταβολή της κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2$ GHz, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα χωρίς κανονικοποίηση. Προφίλ για SNR = 30 dB, $f_0 = 0.4$ GHz (πάνω), $f_0 = 1.2$ GHz (κάτω).



Σχήμα 3.18: Ομάδα αποτελεσμάτων 8. Μεταβολή της κεντρικής συχνότητας f_0 για σταθερό εύρος ζώνης $f_{\max} - f_{\min} = 0.2 \text{ GHz}$, αριθμό συχνοτήτων $N_F = 3$ και μεταλλαγή συχνότητας. Αποτελέσματα με κανονικοποίηση. Προφίλ για $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$, $f_0 = 0.4 \text{ GHz}$ (πάνω), $f_0 = 1.2 \text{ GHz}$ (κάτω).

ελέγχεται αυτοματοποιημένα από υπολογιστή.)

Η συμπεριφορά τής μεθόδου ως προς το θόρυβο δείχνει ότι η ανακατασκευή τής διηλεκτρικής σταθεράς με βάση πειραματικά δεδομένα είναι εφικτή ακόμα και σε υψηλές στάθμες θορύβου. Από το σύνολο των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι η ανακατασκευή τής ηλεκτρικής αγωγιμότητας, με και χωρίς θόρυβο, είναι δυσκολότερη από εκείνη τής διηλεκτρικής σταθεράς. Για υψηλές στάθμες θορύβου, η πληροφορία που παίρνουμε έχει συνήθως περισσότερο ποιοτικό παρά ποσοτικό χαρακτήρα.

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτει ότι στην περίπτωση αντικειμένων στο εσωτερικό δομών, η χρήση μίας μόνο συχνότητας δεν είναι αρκετή για την ανακατασκευή: χρειάζονται περισσότερες συχνότητες για να αντεπεξέρθουμε στο πρόβλημα των περιορισμένων δεδομένων σκέδασης, το οποίο προκύπτει από την αδυναμία λήψης μετρήσεων σε όλη την περιοχή γύρω από το αντικείμενο. Όμως, δείξαμε ότι δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μεγάλο αριθμό συχνοτήτων. Συγκεκριμένα, πέντε συχνότητες αρκούν.

Η επιλογή των κατάλληλων συχνοτήτων είναι σημαντική για την ποιότητα των αποτελεσμάτων. Χρειάζεται να συνδυάσουμε χαμηλές και υψηλές συχνοτήτες ώστε το σχεδιαζόμενο πεδίο να περιέχει ικανοποιητική ποσότητα πληροφορίας για το άγνωστο αντικείμενο. Στις χαμηλές συχνοτήτες, το πρόβλημα έχει περισσότερο γραμμικό χαρακτήρα, καθώς τα φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης δεν είναι τόσο έντονα. Στις συχνοτήτες αυτές παίρνουμε κυρίως πληροφορία για τη θέση τού σχεδαστή. Επίσης, οι συχνοτήτες αυτές διεισδύουν καλύτερα στο αγωγίμο μέσο που περικλείει το χώρο έρευνας και βοηθούν στην ανακατασκευή τής αγωγιμότητας. Από την άλλη πλευρά, οι υψηλές συχνοτήτες προσφέρουν την απαραίτητη ευκρίνεια στην ανακατασκευή. Δείξαμε ότι η ποιότητα τής ανακατασκευής βελτιώνεται όσο αυξάνουμε το εύρος ζώνης, ενώ υπάρχουν ορισμένες συχνοτήτες συντονισμού και αντισυντονισμού, οι οποίες αλληλεπιδρούν καλύτερα ή χειρότερα με το σχεδαστή.

Προτείναμε μια μέθοδο μεταλλαγής πολλαπλών συχνοτήτων και παρουσιάσαμε δύο τρόπους επιλογής συχνοτήτων. Διαπιστώσαμε ότι όταν χρησιμοποιούμε κανονικοποίηση, η μεταλλαγή συχνοτήτων οδηγεί σε χειρότερα αποτελέσματα. Χωρίς κανονικοποίηση, υπάρχει μικρή διαφορά. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η μεταλλαγή συχνοτήτων δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε το χώρο που περικλείει τον άγνωστο σχεδαστή. Σε αντίθετη περίπτωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αρχικά χαμηλές συχνοτήτες και μεγάλες διαστάσεις κυψελών για να εντοπίσουμε τους σχεδαστές. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας υψηλότερες συχνοτήτες και μικρότερες κυψέλες, μπορούμε να περιορίσουμε τις διαστάσεις τού υπολογιστικού χώρου και να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες για τα αντικείμενα.

Από τα αποτελέσματα τού κεφαλαίου προκύπτει ότι η μέθοδος ελαχιστοποιεί

ησης συναρτησιοειδούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε δισδιάστατα προβλήματα αντικειμένων στο εσωτερικό δομών, με πόλωση εγχάρσιου μαγνητικού πεδίου. Στο δεύτερο μέρος της διατριβής, μελετούμε την επέκταση της μεθόδου στις τρεις διαστάσεις. Με δεδομένο ότι ο αριθμός των συχνοτήτων που απαιτούνται είναι μικρός, παραμένουμε στο πεδίο των συχνοτήτων σε ό,τι αφορά τη μέθοδο επίλυσης τού ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος. Επιλέγουμε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων για να αντικαταστήσουμε τη μέθοδο των ροπών στην τρισδιάστατη περίπτωση.

Μέρος II

Μελέτη επέκτασης
στις τρεις διαστάσεις

Κεφάλαιο 4

Ευθύ πρόβλημα

Νῦν τὸ περίβλημα τῆς Γῆς καὶ ἡ Ἐξουσία
Αἰὲν ἢ βρώση τῆς Ψυχῆς καὶ ἡ πεμπτουσία

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει τη μαθηματική περιγραφή τού ευθέως προβλήματος σκέδασης, με βάση την ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Σημείο εκκίνησης είναι οι εξισώσεις τού Maxwell οι οποίες δίνονται σε μια γενική μορφή. Ακολουθούν οι οριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες μέσω των με διαφορετικές ιδιότητες καθώς και στο άπειρο, και το κεφάλαιο κλείνει με τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, όταν ένα γνωστό προσπίπτον κύμα αλληλεπιδρά με γνωστές ανομοιογένειες τού χώρου. Τα αποτελέσματα τού κεφαλαίου θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την ανάπτυξη μιας μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων, σε δύο και τρεις διαστάσεις.

4.1 Εξισώσεις Maxwell

Εκφράζουμε όλες τις χρονικά μεταβαλλόμενες ποσότητες στο πεδίο των συχνοτήτων, θεωρώντας χρονική εξάρτηση τής μορφής $e^{+j\omega t}$. Για την περίπτωση γραμμικών, ωμικών, ανομοιογενών και ανισοτροπικών μέσων με διασπορά, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις τού Maxwell:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}) = \rho \quad (4.1\alpha')$$

$$\nabla \cdot (\bar{\mu} \cdot \mathbf{H}) = \tau \quad (4.1\beta')$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (4.1\gamma')$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (4.1\delta')$$

όπου

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{\boldsymbol{\mu}} - j \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\omega} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - j \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\omega}.\end{aligned}$$

και

\mathbf{E}	το ηλεκτρικό πεδίο, σε V/m
\mathbf{H}	το μαγνητικό πεδίο, σε A/m
ρ	η πυκνότητα ελεύθερων ηλεκτρικών φορτίων, σε Cb/m ³
τ	η πυκνότητα ελεύθερων μαγνητικών φορτίων, σε Wb/m ³
\mathbf{J}	η πυκνότητα εφαρμοσμένου ηλεκτρικού ρεύματος, σε A/m ²
\mathbf{M}	η πυκνότητα εφαρμοσμένου μαγνητικού ρεύματος, σε V/m ²
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	ο τανυστής τής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας, σε F/m
$\bar{\boldsymbol{\mu}}$	ο τανυστής τής μαγνητικής διαπερατότητας, σε H/m
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	ο τανυστής τής ηλεκτρικής αγωγιμότητας, σε S/m
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$	ο τανυστής τής μαγνητικής αγωγιμότητας, σε Ω/m.

Οι τανυστές δεύτερης τάξης των εξισώσεων (4.1) είναι συναρτήσεις του χώρου και τής συχνότητας, και αναπαρίστανται από πίνακες 3×3 . Θεωρούμε ότι όλοι οι τανυστές δεύτερης τάξης είναι διαγώνιοι. Για παράδειγμα, ο τανυστής τής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας αναπαρίσται ως:

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Οι τανυστές $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ και $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ περιλαμβάνουν την ηλεκτρική και μαγνητική αγωγιμότητα. Στην ειδική περίπτωση ομοιογενών, ιστροπικών, ωμικών μέσων, χωρίς μηχανισμό μαγνητικών απωλειών, μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{\mathbf{I}}_3 \quad (4.2\alpha')$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \mu_r \bar{\mathbf{I}}_3 \quad (4.2\beta')$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) \bar{\mathbf{I}}_3 \quad (4.2\gamma')$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \mu_r \bar{\mathbf{I}}_3 \quad (4.2\delta')$$

όπου

ϵ_0	$= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$	η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του κενού
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$	η μαγνητική διαπερατότητα του κενού
ϵ_r		η σχετική ηλεκτρική επιδεκτικότητα του μέσου (αδιάστατη)
μ_r		η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου (αδιάστατη)
σ		η αγωγιμότητα του μέσου, σε S/m
\bar{I}_3		ο μοναδιαίος τανυστής δεύτερης τάξης.

4.2 Οριακές συνθήκες

Στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ μέσων με διαφορετικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες, τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} και \mathbf{H} δεν είναι απαραίτητα συνεχείς συναρτήσεις του χώρου. Θεωρούμε μια διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του μέσου 1 και του μέσου 2. Συμβολίζουμε με \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια και φορά από το μέσο 1 στο 2, και με \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i ($i = 1, 2$) τα πεδία στα δύο μέσα. Θεωρούμε επίσης ότι δεν υπάρχουν εφαρμοσμένα επιφανειακά φορτία και ρεύματα μεταξύ των δύο μέσων. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν κάποιο από τα δύο μέσα είναι τέλειος αγωγός ή όχι, και έχουμε τις παρακάτω σχέσεις (Balanis, 1989).

Μέσα πεπερασμένης αγωγιμότητας

Αν και τα δύο μέσα είναι διηλεκτρικά με πεπερασμένη αγωγιμότητα, τότε:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (4.3\alpha')$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (4.3\beta')$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E}_2 - \bar{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{E}_1) = 0 \quad (4.3\gamma')$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{\mu}_2 \cdot \mathbf{H}_2 - \bar{\mu}_1 \cdot \mathbf{H}_1) = 0. \quad (4.3\delta')$$

Μέσα άπειρης αγωγιμότητας

Αν το μέσο 1 είναι τέλειος ηλεκτρικός αγωγός (άπειρη ηλεκτρική αγωγιμότητα), τότε $\mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{H}_1 = 0$ και:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (4.4\alpha')$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s \quad (4.4\beta')$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E}_2) = \rho_s \quad (4.4\gamma')$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{\mu}_2 \cdot \mathbf{H}_2) = 0 \quad (4.4\delta')$$

όπου

\mathbf{J}_s η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, σε A/m
 ρ_s η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, σε C/m^2 .

4.3 Συνθήκη ακτινοβολίας

Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι πηγές και οι ανομοιογένειες βρίσκονται σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου κοντά στην αρχή των συντεταγμένων, τότε η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld για τρισδιάστατα προβλήματα γράφεται (Morita et al., 1990):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + j k \psi \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$k = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r$$

όπου

ψ οποιαδήποτε από τις ορθογώνιες συνιστώσες του πεδίου \mathbf{E} ή \mathbf{H}
 r η απόσταση από την αρχή των αξόνων
 ϵ_r, μ_r αναφέρονται στο μέσο που περιβάλλει τις πηγές.

4.4 Εξισώσεις σκεδαζόμενου πεδίου

Στα προβλήματα σκέδασης, ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αλληλεπιδρά με τις ανομοιογένειες του χώρου που αποτελούν τους σκεδαστές. Τα επαγόμενα ρεύματα στο εσωτερικό και την επιφάνεια των σκεδαστών δημιουργούν το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Για γραμμικά μέσα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή τής υπέρθεσης στις εξισώσεις του Maxwell: το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.1), ισούται με το άθροισμα του προσπίπτοντος $\mathbf{E}^{(i)}$ και του σκεδαζόμενου $\mathbf{E}^{(s)}$ ηλεκτρικού πεδίου. Αντίστοιχα ισχύουν και για το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)} \quad (4.6\alpha')$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{H}^{(s)}. \quad (4.6\beta')$$

Σημειώνεται ότι αυτός ο διαχωρισμός του ολικού πεδίου ισχύει με την προϋπόθεση ότι το σκεδαζόμενο πεδίο δεν επηρεάζει το προσπίπτον.

Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παράγεται από τις πηγές φορτίων $\rho^{(i)}$, $\tau^{(i)}$, τις εφαρμοσμένες ρευματικές κατανομές $\mathbf{J}^{(i)}$, $\mathbf{M}^{(i)}$ και αναπτύσσεται στο χώρο με ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες $\bar{\epsilon}_{(b)}$, $\bar{\mu}_{(b)}$, $\bar{\sigma}_{(b)}$, $\bar{\sigma}_{(b)}^*$, τον οποίο ονομάζουμε χώρο υποβάθρου (από τον αντίστοιχο αγγλικό όρο *background medium*).

Μπορούμε να ορίσουμε την ηλεκτρική και μαγνητική αντίθεση (*contrast*) των δύο μέσων ως:

$$\bar{\epsilon}_{(e)} = \bar{\epsilon}_{(e)} - j \frac{\bar{c}_{(e)}}{\omega} \triangleq \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{(b)} = (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{(b)}) - j \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{(b)}}{\omega} \quad (4.7\alpha')$$

$$\bar{\epsilon}_{(m)} = \bar{\epsilon}_{(m)} - j \frac{\bar{c}_{(m)}}{\omega} \triangleq \bar{\mu} - \bar{\mu}_{(b)} = (\bar{\mu} - \bar{\mu}_{(b)}) - j \frac{\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}_{(b)}^*}{\omega}. \quad (4.7\beta')$$

Οι εξισώσεις (4.1) για τα πεδία $\mathbf{E}^{(i)}$ και $\mathbf{H}^{(i)}$ παίρνουν τη μορφή:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}) = \rho^{(i)} \quad (4.8\alpha')$$

$$\nabla \cdot (\bar{\mu}_{(b)} \cdot \mathbf{H}^{(i)}) = \tau^{(i)} \quad (4.8\beta')$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(i)} = -j\omega \bar{\mu}_{(b)} \cdot \mathbf{H}^{(i)} - \mathbf{M}^{(i)} \quad (4.8\gamma')$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(i)} = j\omega \bar{\epsilon}_{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{J}^{(i)}. \quad (4.8\delta')$$

Αφαιρούμε τις (4.8) από τις (4.1) χρησιμοποιώντας και τις (4.6). Μ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις για τα σκεδαζόμενα πεδία $\mathbf{E}^{(s)}$ και $\mathbf{H}^{(s)}$:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^{(s)}) = -\nabla \cdot \{(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{(b)}) \cdot \mathbf{E}^{(i)}\} + (\rho - \rho^{(i)}) \quad (4.9\alpha')$$

$$\nabla \cdot (\bar{\mu} \cdot \mathbf{H}^{(s)}) = -\nabla \cdot \{(\bar{\mu} - \bar{\mu}_{(b)}) \cdot \mathbf{H}^{(i)}\} + (\tau - \tau^{(i)}) \quad (4.9\beta')$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(s)} = -j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}^{(s)} - j\omega (\bar{\mu} - \bar{\mu}_{(b)}) \cdot \mathbf{H}^{(i)} - (\mathbf{M} - \mathbf{M}^{(i)}) \quad (4.9\gamma')$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(s)} = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^{(s)} + j\omega (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{(b)}) \cdot \mathbf{E}^{(i)} + (\mathbf{J} - \mathbf{J}^{(i)}). \quad (4.9\delta')$$

Παρατηρούμε ότι οι πρώτοι όροι στο δεξί μέλος των εξισώσεων (4.9α') και (4.9β') είναι μη μηδενικοί μόνο στις περιοχές του χώρου όπου το μέσο διαφέρει από το υπόβαθρο, δηλαδή εκεί όπου υπάρχουν σκεδαστές. Οι όροι αυτοί έχουν διαστάσεις πυκνότητας ηλεκτρικών και μαγνητικών φορτίων, αντίστοιχα, και πρόκειται για τα επαγόμενα φορτία που προκαλεί το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πάνω στους σκεδαστές. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε:

$$\rho^{(ind)} \triangleq -\nabla \cdot \{(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{(b)}) \cdot \mathbf{E}^{(i)}\} = -\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_{(e)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}) \quad (4.10\alpha')$$

$$\tau^{(ind)} \triangleq -\nabla \cdot \{(\bar{\mu} - \bar{\mu}_{(b)}) \cdot \mathbf{H}^{(i)}\} = -\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_{(m)} \cdot \mathbf{H}^{(i)}). \quad (4.10\beta')$$

Επίσης, οι δεύτεροι όροι στις εξισώσεις (4.9α') και (4.9β') είναι μη μηδενικοί μόνο στις περιοχές όπου η πυκνότητα ηλεκτρικών και μαγνητικών φορτίων, αντίστοιχα, διαφέρει από εκείνη η οποία δημιουργεί το προσπίπτον πεδίο. Άρα οι όροι αυτοί περιλαμβάνουν μόνο τις πηγές φορτίων που συνεισφέρουν στο σκεδαζόμενο πεδίο, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\rho^{(s)} \triangleq \rho - \rho^{(i)} \quad (4.11\alpha')$$

$$\tau^{(s)} \triangleq \tau - \tau^{(i)}. \quad (4.11\beta')$$

Παρομοίως, οι δεύτεροι όροι στο δεξί μέλος των εξισώσεων (4.9γ') και (4.9δ') ορίζονται ως τα επαγόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα που προκαλεί το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πάνω στους σκεδαστές:

$$\mathbf{M}^{(ind)} \triangleq j\omega(\bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_{(b)}) \cdot \mathbf{H}^{(i)} = j\omega\bar{\mathbf{C}}_{(m)} \cdot \mathbf{H}^{(i)} \quad (4.12\alpha')$$

$$\mathbf{J}^{(ind)} \triangleq j\omega(\bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{(b)}) \cdot \mathbf{E}^{(i)} = j\omega\bar{\mathbf{C}}_{(e)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}. \quad (4.12\beta')$$

Τέλος, οι τρίτοι όροι στις εξισώσεις (4.9γ') και (4.9δ') περιλαμβάνουν μόνο τις εφαρμοσμένες πηγές μαγνητικού και ηλεκτρικού ρεύματος που συνεισφέρουν στο σκεδαζόμενο πεδίο, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{M}^{(s)} \triangleq \mathbf{M} - \mathbf{M}^{(i)} \quad (4.13\alpha')$$

$$\mathbf{J}^{(s)} \triangleq \mathbf{J} - \mathbf{J}^{(i)}. \quad (4.13\beta')$$

Οι εξισώσεις (4.9) για το σκεδαζόμενο πεδίο μπορούν τώρα να γραφούν στην πιο συμπαγή μορφή:

$$\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(s)}) = \rho^{(ind)} + \rho^{(s)} \quad (4.14\alpha')$$

$$\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}^{(s)}) = \tau^{(ind)} + \tau^{(s)} \quad (4.14\beta')$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(s)} = -j\omega\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}^{(s)} - \mathbf{M}^{(ind)} - \mathbf{M}^{(s)} \quad (4.14\gamma')$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(s)} = j\omega\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}^{(s)} + \mathbf{J}^{(ind)} + \mathbf{J}^{(s)}. \quad (4.14\delta')$$

Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{H}^{(i)}$ και οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του υποβάθρου είναι γνωστά μεγέθη, οπότε οι επαγόμενες πηγές φορτίου $\rho^{(ind)}$, $\tau^{(ind)}$ και τα επαγόμενα ρεύματα $\mathbf{J}^{(ind)}$, $\mathbf{M}^{(ind)}$ είναι επίσης γνωστά. Οι εξισώσεις (4.14) δίνουν τότε το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\mathbf{E}^{(s)}$, $\mathbf{H}^{(s)}$ σε χώρο με ιδιότητες $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ στην περίπτωση που – εκτός από το προσπίπτον κύμα – εφαρμόζονται πηγές φορτίων $\rho^{(s)}$, $\tau^{(s)}$ και ρευμάτων $\mathbf{J}^{(s)}$, $\mathbf{M}^{(s)}$. Πρόκειται για τη μαθηματική περιγραφή του ευθέως προβλήματος σκέδασης.

Το σκεδαζόμενο πεδίο ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας (4.5) εφόσον τόσο οι επαγόμενες όσο και οι εφαρμοσμένες πηγές βρίσκονται σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Για να συμπληρωθεί η λύση του προβλήματος, το ολικό πεδίο πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες της παραγράφου 4.2.

Παρατήρηση 4.1 Ο ορισμός που δόθηκε για το χώρο υποβάθρου και τις πηγές που παράγουν το προσπίπτον πεδίο είναι γενικός και δεν περιορίζεται μόνο στην περίπτωση επίπεδων κυμάτων στον ελεύθερο χώρο. Μπορούμε, για παράδειγμα, να θεωρήσουμε ως υπόβαθρο ένα χώρο που περιλαμβάνει ανομοιογένειες και ως προσπίπτον πεδίο το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης επίπεδων κυμάτων με αυτές. Τότε ως σκεδαστή θα θεωρήσουμε ανομοιογένειες του χώρου που δεν ανήκουν στο υπόβαθρο, και το σκεδαζόμενο πεδίο είναι η συνεισφορά μόνο αυτών των σκεδαστών στο ολικό πεδίο.

Παρατήρηση 4.2 Οι εξισώσεις (4.1) παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα με τις (4.14). Οι πρώτες χρησιμοποιούνται για κλειστά προβλήματα (κοιλότητες, κυματοδηγοί) καθώς και για προβλήματα ακτινοβολίας· οι δεύτερες για προβλήματα σκέδασης ή μικτά προβλήματα ακτινοβολίας και σκέδασης. Η μετάβαση από τις (4.1) στις (4.14) γίνεται αν θεωρήσουμε

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^{(s)} & \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^{(s)} \\ \rho \rightarrow \rho^{(ind)} + \rho^{(s)} & \tau \rightarrow \tau^{(ind)} + \tau^{(s)} \\ \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}^{(ind)} + \mathbf{J}^{(s)} & \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^{(ind)} + \mathbf{M}^{(s)} \end{array}$$

όπου τα $\rho^{(ind)}$, $\tau^{(ind)}$ δίνονται από τις σχέσεις (4.10), τα $\rho^{(s)}$, $\tau^{(s)}$ από τις (4.11), τα $\mathbf{J}^{(ind)}$, $\mathbf{M}^{(ind)}$ από τις (4.12) και τα $\mathbf{J}^{(s)}$, $\mathbf{M}^{(s)}$ από τις (4.13).

Με βάση αυτή την αντιστοιχία, στο εξής όπου αναφερόμαστε στις εξισώσεις (4.1) θεωρούμε ότι αναφερόμαστε ισοδύναμα και στις (4.14).

Κεφάλαιο 5

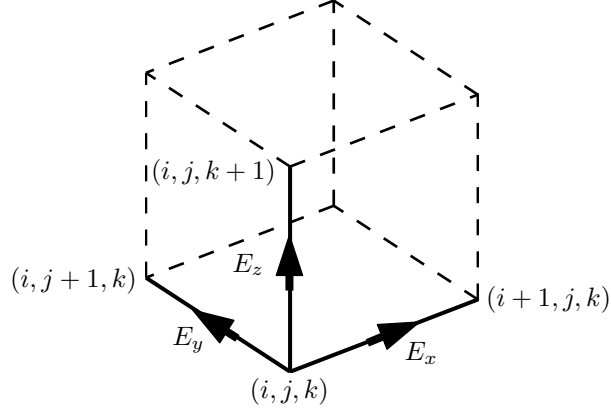
Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων

Νῦν τῆς Σελήνης τὸ μελάγχρωμα τὸ ἀνίατο
Αἰὲν τὸ χρυσοκύανο τοῦ Γαλαξία σελάγισμα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μια αριθμητική μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων (4.1). Πρόκειται για μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων η οποία μπορεί να εφαρμόζεται τόσο σε κλειστά προβλήματα (εύρεση ρυθμών σε κοιλότητες και κυματοδηγούς) όσο και σε ανοιχτά (ακτινοβολία, σκέδαση). Μετά την περιγραφή τῆς μεθόδου ασχολούμαστε με δύο ειδικά θέματα: τις απορροφητικές οριακές συνθήκες για τον τερματισμό τού πλέγματος και το μετασχηματισμό τού κοντινού σε μακρινό πεδίο. Η μέθοδος παρουσιάζεται τόσο για δισδιάστατα προβλήματα (πόλωση εγκάρσια μαγνητική και εγκάρσια ηλεκτρική) όσο και για τρισδιάστατα. Η μαθηματική περιγραφή που αναπτύσσουμε προσφέρεται για ενσωμάτωση σε μια μέθοδο μικροκυματικής απεικόνισης, όπως εκείνη τού δεύτερου κεφαλαίου.

5.1 Από το συνεχές στο διακριτό

Στις εξισώσεις (4.1), τα \mathbf{E} , \mathbf{H} είναι διανυσματικά πεδία, δηλαδή διανύσματα που ορίζονται για κάθε σημείο τού χώρου. Στη μέθοδο που αναπτύσσεται εδώ, ο συνεχής χώρος διακριτοποιείται, και τα διανύσματα αυτά ορίζονται σε συγκεκριμένα μόνο σημεία. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το κυβικό πλέγμα τού Yee (1966).



Σχήμα 5.1: Στοιχειώδης κυψέλη (i, j, k) τού πλέγματος.

Στο εσωτερικό τού υπολογιστικού χώρου θεωρούμε ένα κυβικό πλέγμα. Η στοιχειώδης κυψέλη τού πλέγματος έχει μήκος πλευράς ίσο με h (Σχήμα 5.1). Οι συνιστώσες τού ηλεκτρικού πεδίου ορίζονται στα κέντρα των ακμών που είναι παράλληλες προς αυτές. Οι συνιστώσες τού μαγνητικού πεδίου ορίζονται στα κέντρα των πλευρών που είναι κάθετες προς αυτές. Ο κόμβος με συντεταγμένες (ih, jh, kh) χαρακτηρίζεται με την τριάδα (i, j, k) . Με την ίδια τριάδα συμβολίζουμε και την κυψέλη που περικλείεται από τους κόμβους (i, j, k) και $(i+1, j+1, k+1)$.

Θεωρούμε ότι οι συνιστώσες $E_x^{i,j,k}$, $E_y^{i,j,k}$, $E_z^{i,j,k}$ τού ηλεκτρικού και $H_x^{i,j,k}$, $H_y^{i,j,k}$, $H_z^{i,j,k}$ τού μαγνητικού πεδίου ανήκουν στην κυψέλη (i, j, k) . Οι συντεταγμένες των σημείων όπου ορίζονται αυτές οι συνιστώσες περιέχονται στον Πίνακα 5.1. Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα ορίζονται στα ίδια σημεία με τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, αντίστοιχα.

Πίνακας 5.1: Συντεταγμένες πεδιακών συνιστωσών στην κυψέλη (i, j, k) .

	x/h	y/h	z/h
$E_x^{i,j,k}$	$i+1/2$	j	k
$E_y^{i,j,k}$	i	$j+1/2$	k
$E_z^{i,j,k}$	i	j	$k+1/2$
$H_x^{i,j,k}$	i	$j+1/2$	$k+1/2$
$H_y^{i,j,k}$	$i+1/2$	j	$k+1/2$
$H_z^{i,j,k}$	$i+1/2$	$j+1/2$	k

Οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες τού μέσου θεωρούνται σταθερές στο εσωτερικό τής κυψέλης. Για παράδειγμα, η τιμή τού τανυστή τής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας στην κυψέλη (i, j, k) συμβολίζεται με $\bar{\epsilon}^{i,j,k}$. Αντίστοιχο συμβολισμό χρησιμοποιούμε για τους υπόλοιπους τανυστές καθώς και για τις βαθμωτές ποσότητες.

Στο σχήμα τού Yee, τα πεδία ορίζονται σε σημεία όπου εφάπτονται γειτονικές κυψέλες: το ηλεκτρικό πεδίο στην κοινή ακμή τεσσάρων κυψελών, το μαγνητικό πεδίο στην κοινή πλευρά δύο κυψελών. Όταν διακριτοποιούνται όροι τής μορφής $\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$ ή $\bar{\mu} \cdot \mathbf{H}$, δε χρησιμοποιούμε μόνο τις ηλεκτρομαγνητικές παραμέτρους τής κυψέλης όπου ανήκουν οι συνιστώσες τού πεδίου, αλλά παίρνουμε το μέσο όρο των τιμών τού $\bar{\epsilon}$ ή $\bar{\mu}$ στις εφαπτόμενες κυψέλες. Έτσι, για τη διακριτοποίηση στην κυψέλη (i, j, k) , δεν αντιστοιχούμε:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} E_x &\rightarrow \epsilon_{xx}^{i,j,k} E_x^{i,j,k} & \mu_{xx} H_x &\rightarrow \mu_{xx}^{i,j,k} H_x^{i,j,k} \\ \epsilon_{yy} E_y &\rightarrow \epsilon_{yy}^{i,j,k} E_y^{i,j,k} & \mu_{yy} H_y &\rightarrow \mu_{yy}^{i,j,k} H_y^{i,j,k} \\ \epsilon_{zz} E_z &\rightarrow \epsilon_{zz}^{i,j,k} E_z^{i,j,k} & \mu_{zz} H_z &\rightarrow \mu_{zz}^{i,j,k} H_z^{i,j,k} \end{aligned}$$

αλλά

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} E_x &\rightarrow \langle \epsilon_{xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{i,j,k} & \mu_{xx} H_x &\rightarrow \langle \mu_{xx}^{i,j,k} \rangle H_x^{i,j,k} \\ \epsilon_{yy} E_y &\rightarrow \langle \epsilon_{yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{i,j,k} & \mu_{yy} H_y &\rightarrow \langle \mu_{yy}^{i,j,k} \rangle H_y^{i,j,k} \\ \epsilon_{zz} E_z &\rightarrow \langle \epsilon_{zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{i,j,k} & \mu_{zz} H_z &\rightarrow \langle \mu_{zz}^{i,j,k} \rangle H_z^{i,j,k} \end{aligned} \quad (5.1)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{xx}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{4} \left(\epsilon_{xx}^{i,j,k} + \epsilon_{xx}^{i,j-1,k} + \epsilon_{xx}^{i,j-1,k-1} + \epsilon_{xx}^{i,j,k-1} \right) \\ \langle \epsilon_{yy}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{4} \left(\epsilon_{yy}^{i,j,k} + \epsilon_{yy}^{i-1,j,k} + \epsilon_{yy}^{i-1,j,k-1} + \epsilon_{yy}^{i,j,k-1} \right) \\ \langle \epsilon_{zz}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{4} \left(\epsilon_{zz}^{i,j,k} + \epsilon_{zz}^{i-1,j,k} + \epsilon_{zz}^{i-1,j-1,k} + \epsilon_{zz}^{i,j-1,k} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

και

$$\begin{aligned} \langle \mu_{xx}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{2} \left(\mu_{xx}^{i,j,k} + \mu_{xx}^{i-1,j,k} \right) \\ \langle \mu_{yy}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{2} \left(\mu_{yy}^{i,j,k} + \mu_{yy}^{i,j-1,k} \right) \\ \langle \mu_{zz}^{i,j,k} \rangle &\triangleq \frac{1}{2} \left(\mu_{zz}^{i,j,k} + \mu_{zz}^{i,j,k-1} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Για βαθμωτές ποσότητες (όπως η πυκνότητα φορτίου), όπου χρειάζεται η διακριτοποιημένη τιμή στον κόμβο (i, j, k) , χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή στις οκτώ κυψέλες γύρω από αυτόν:

$$\langle \rho^{i,j,k} \rangle \triangleq \frac{1}{8}(\rho^{i,j,k} + \rho^{i-1,j,k} + \rho^{i-1,j-1,k} + \rho^{i,j-1,k} + \rho^{i,j,k-1} + \rho^{i-1,j,k-1} + \rho^{i-1,j-1,k-1} + \rho^{i,j-1,k-1}). \quad (5.4)$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις του Maxwell σε διακριτοποιημένη μορφή. Οι χωρικές παράγωγοι των εξισώσεων (4.1) προσεγγίζονται με πεπερασμένες διαφορές. Η μαθηματική έκφραση για την προσέγγιση των παραγώγων πρώτης τάξης δίνεται στο παράρτημα Β' (εξίσωση (B'.2α'), σελίδα 119).

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα Γ'. Η πορεία που ακολουθείται είναι παρόμοια με εκείνη που οδηγεί στην κυματική εξίσωση (Helmholtz) για το ηλεκτρικό πεδίο. Υπενθυμίζεται ότι στη συνεχή μορφή των εξισώσεων, παίρνουμε το στροβιλισμό της εξίσωσης (4.1γ') (εξίσωση Faraday), αντικαθιστούμε το στροβιλισμό του μαγνητικού πεδίου από την (4.1δ') (εξίσωση Maxwell-Ampère) και χρησιμοποιούμε την (4.1α') (εξίσωση Gauss) στον όρο όπου εμφανίζεται η κλίση της απόκλισης του $\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$.

Αντίστοιχα, από τη διακριτοποίηση της (4.1γ') προκύπτουν οι εξισώσεις (Γ'.4) για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου συναρτήσεως των συνιστωσών του ηλεκτρικού από τη διακριτοποίηση της (4.1δ') προκύπτουν οι (Γ'.10) για το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσεως του μαγνητικού. Αντικαθιστώντας τις πρώτες στις δεύτερες, καταλήγουμε στις τρεις γραμμικές εξισώσεις (Γ'.13). Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν κάθε μία από τις τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε μία κυψέλη, με συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην ίδια και σε γειτονικές κυψέλες.¹

Οι παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν από τους νόμους Faraday και Maxwell-Ampère. Το ηλεκτρικό πεδίο, όμως, πρέπει να ικανοποιεί και το νόμο του Gauss. Σε αναλογία με τη συνεχή περίπτωση, δε χρησιμοποιούμε την απόκλιση, $\nabla \cdot (\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E})$, αλλά την κλίση της απόκλισης, $\nabla \nabla \cdot (\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E})$. Από τη διακριτοποίηση της κλίσης της (4.1α'), προκύπτουν τρεις επιπλέον εξισώσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε μια κυψέλη (Γ'.27).

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (Γ'.13) και (Γ'.27), καταλήγουμε σε τρεις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών.² Οι εξισώσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν για την αριθμητική επίλυση κλειστών και ανοιχτών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων.

¹ Εδώ αναφερόμαστε στην πλήρη μορφή των εξισώσεων, για προβλήματα τριών διαστάσεων. Στο παράρτημα Γ' παρουσιάζονται επίσης οι εξισώσεις για διδιάστατα προβλήματα.

² Η ρητή γραφή των εξισώσεων που προκύπτουν, δε θα είχε καμιά συνεισφορά στην παρουσίαση του θέματος (εκτός από μερικές επιπλέον σελίδες με μαθηματικά).

Παρατήρηση 5.1 Οι εξισώσεις (Γ.27) δεν εφαρμόζονται για συνιστώσες ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες είναι εσωτερικές, εφαπτομενικές ή κάθετες σε τέλειο αγωγό. Αυτό συμβαίνει γιατί στη διακριτοποίηση της κλίσης της απόκλισης του ηλεκτρικού πεδίου, η πυκνότητα φορτίων δεν περιλαμβάνει τα επιφανειακά φορτία ρ_s των οριακών συνθηκών (4.4).

Παρατήρηση 5.2 Οι εξισώσεις (5.2), (5.3) και (5.4) ισχύουν για τις μέσες τιμές μεγεθών σε κυψέλες στο εσωτερικό του πλέγματος. Για τις κυψέλες που βρίσκονται στα όρια του πλέγματος, οι μέσες τιμές υπολογίζονται προφανώς με βάση μόνο τις υπάρχουσες γειτονικές κυψέλες.

5.2 Αρίθμηση τιμών διακριτοποιημένων μεγεθών

5.2.1 Τρισδιάστατα προβλήματα

Χρησιμοποιούμε το πλήρες κυβικό πλέγμα του Yee. Ο υπολογιστικός χώρος περιέχει N_v κυψέλες κατά τη διεύθυνση v ($v = x, y, z$). Το πλήθος των άγνωστων συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου είναι $N = 3N_xN_yN_z$. Με εξαίρεση τις πυκνότητες φορτίων, για κάθε φυσικό μέγεθος του προβλήματος ορίζονται τρεις τιμές σε κάθε κυψέλη: για τα διακριτοποιημένα διανυσματικά πεδία, οι τιμές αυτές είναι οι τρεις συνιστώσες τους, ενώ για τους τανυστές είναι τα διαγώνια στοιχεία. Αντιστοιχούμε ένα μοναδικό αριθμό l σε κάθε μία από τις $N = 3N_xN_yN_z$ τιμές αυτών των μεγεθών, ενώ στις $N/3$ τιμές των βαθμωτών μεγεθών αντιστοιχούμε ένα μοναδικό αριθμό p . Οι l, p δίνονται από τις σχέσεις:

$$l(w, i, j, k) = w + 3(i - 1) + 3N_x(j - 1) + 3N_xN_y(k - 1) \quad (5.5\alpha')$$

$$p(i, j, k) = 1 + (i - 1) + N_x(j - 1) + N_xN_y(k - 1) \quad (5.5\beta')$$

όπου

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N_x & j &= 1, \dots, N_y & k &= 1, \dots, N_z \\ w &= 1, 2, 3 & & & & \text{για τη συνιστώσα } x, y, z \text{ αντίστοιχα.} \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι για κάθε κυψέλη (i, j, k) , υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των τριών δεικτών l_w ($w = 1, 2, 3$) για τα διανυσματικά μεγέθη και του δείκτη p για τα βαθμωτά.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις N τιμές του ηλεκτρικού πεδίου σε μορφή διανύσματος, ακολουθώντας την παραπάνω αρίθμηση:

$$\mathbf{e} = \left(\underbrace{E_x^{1,1,1}}_1 \underbrace{E_y^{1,1,1}}_2 \underbrace{E_z^{1,1,1}}_3 \underbrace{E_x^{2,1,1}}_4 \dots \underbrace{E_x^{1,2,1}}_{1+3N_x} \dots \underbrace{E_x^{1,1,2}}_{1+3N_xN_y} \dots \underbrace{E_z^{N_x,N_y,N_z}}_N \right)^T \quad (5.6)$$

ενώ με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{h}, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^*, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{c}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{c}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{c}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{c}_{\boldsymbol{\sigma}^*}, \dot{\mathbf{c}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{c}}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{e}^i, \mathbf{h}^i$ κτλ.

Για βαθμωτά μεγέθη, όπως η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, το διάνυσμα των $N/3$ τιμών ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{\rho} = \left(\underbrace{\rho^{1,1,1}}_1 \underbrace{\rho^{2,1,1}}_2 \dots \underbrace{\rho^{1,2,1}}_{1+N_x} \dots \underbrace{\rho^{1,1,2}}_{1+N_x N_y} \dots \underbrace{\rho^{N_x, N_y, N_z}}_{N/3} \right)^T. \quad (5.7)$$

5.2.2 Δισδιάστατα προβλήματα

Οι ιδιότητες τού μέσου, καθώς και τα πεδία, παραμένουν αναλλοίωτα σε μετατόπιση ως προς τον άξονα z . Τα διακριτοποιημένα μεγέθη παραμένουν σταθερά για κάθε τιμή τού άνω δείκτη k . Αυτό απλοποιεί τις δύο πρώτες εξισώσεις από τις (5.2), την τρίτη από τις (5.3) και την (5.4).

Χρησιμοποιούμε επίπεδο τετραγωνικό πλέγμα με δύο μόνο άνω δείκτες i, j για τα διακριτοποιημένα μεγέθη. Το πλέγμα τού υπολογιστικού χώρου περιέχει N_v κυψέλες κατά τη διεύθυνση v ($v = x, y$). Ανάλογα με την πόλωση, κάθε φυσικό μέγεθος έχει μία ή δύο τιμές σε κάθε κυψέλη. Για τα μεγέθη με δύο τιμές ανά κυψέλη, χρησιμοποιούμε την αρίθμηση με βάση το δείκτη l , ενώ για τα υπόλοιπα μεγέθη, το δείκτη p .

Οι δείκτες l, p δίνονται από τις σχέσεις:

$$l(w, i, j, k) = w + 2(i - 1) + 2N_x(j - 1) \quad (5.8\alpha')$$

$$p(i, j, k) = 1 + (i - 1) + N_x(j - 1) \quad (5.8\beta')$$

όπου

$$\begin{array}{ll} i = 1, \dots, N_x & j = 1, \dots, N_y \\ w = 1, 2 & \text{για τη συνιστώσα } x, y \text{ αντίστοιχα.} \end{array}$$

Οι τανυστές ηλεκτρομαγνητικών παραμέτρων τού μέσου αναπαρίστανται πάντα με διαγώνιους πίνακες 3×3 . Όμως, μόνο οι τιμές που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες τού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου επηρεάζουν το πρόβλημα. Έτσι, ανάλογα με την πόλωση, το διάνυσμα τιμών των τανυστών περιέχει μόνο τις αντίστοιχες τιμές τής διαγωνίου.

Για βαθμωτά μεγέθη, όπως η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, το διάνυσμα των $N_x N_y$ τιμών ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{\rho} = \left(\underbrace{\rho^{1,1}}_1 \underbrace{\rho^{2,1}}_2 \dots \underbrace{\rho^{1,2}}_{1+N_x} \dots \underbrace{\rho^{N_x, N_y}}_{N_x N_y} \right)^T. \quad (5.9)$$

Εγκάρσια πολωμένο μαγνητικό (transverse magnetic, TM) πεδίο Το μαγνητικό πεδίο είναι εγκάρσιο στον άξονα z και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο σ' αυτόν. Οι μη μηδενικές συνιστώσες των πεδίων, E_z, H_x, H_y , ορίζονται στο ίδιο επίπεδο (Πίνακας 5.1), ενώ $E_x = E_y = 0, H_z = 0$. Το πλήθος των άγνωστων συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου είναι $N = N_x N_y$. Οι συνιστώσες αυτές αριθμούνται με βάση το δείκτη p :

$$\mathbf{e} = \left(\underbrace{E_z^{1,1}}_1 \underbrace{E_z^{2,1}}_2 \dots \underbrace{E_z^{1,2}}_{1+N_x} \dots \underbrace{E_z^{N_x, N_y}}_N \right)^T \quad (5.10)$$

και αντίστοιχα για τα διανύσματα \mathbf{j}, \mathbf{e}^i και $\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \mathbf{c}_\varepsilon, \mathbf{c}_\sigma, \dot{\mathbf{c}}_\varepsilon$.

Οι $2N_x N_y$ τιμές τού μαγνητικού πεδίου γράφονται σε μορφή διανύσματος χρησιμοποιώντας την αρίθμηση με βάση το δείκτη l :

$$\mathbf{h} = \left(\underbrace{H_x^{1,1}}_1 \underbrace{H_y^{1,1}}_2 \underbrace{H_x^{2,1}}_3 \dots \underbrace{H_x^{1,2}}_{1+2N_x} \dots \underbrace{H_y^{N_x, N_y}}_{2N} \right)^T \quad (5.11)$$

και αντίστοιχα για τα διανύσματα \mathbf{m}, \mathbf{h}^i και $\mu, \sigma^*, \dot{\mu}, \mathbf{c}_\mu, \mathbf{c}_{\sigma^*}, \dot{\mathbf{c}}_\mu$.

Εγκάρσια πολωμένο ηλεκτρικό (transverse electric, TE) πεδίο Το ηλεκτρικό πεδίο είναι εγκάρσιο στον άξονα z και το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο σ' αυτόν. Οι μη μηδενικές συνιστώσες των πεδίων, E_x, E_y, H_z , ορίζονται στο ίδιο επίπεδο (Πίνακας 5.1) ενώ $E_z = 0, H_x = H_y = 0$. Το πλήθος των άγνωστων συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου είναι $N = 2N_x N_y$. Οι συνιστώσες αυτές αριθμούνται με βάση το δείκτη l :

$$\mathbf{e} = \left(\underbrace{E_x^{1,1}}_1 \underbrace{E_y^{1,1}}_2 \underbrace{E_x^{2,1}}_3 \dots \underbrace{E_x^{1,2}}_{1+2N_x} \dots \underbrace{E_y^{N_x, N_y}}_N \right)^T \quad (5.12)$$

και αντίστοιχα για τα διανύσματα \mathbf{j}, \mathbf{e}^i και $\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \mathbf{c}_\varepsilon, \mathbf{c}_\sigma, \dot{\mathbf{c}}_\varepsilon$.

Οι $N_x N_y$ τιμές τού μαγνητικού πεδίου γράφονται σε μορφή διανύσματος χρησιμοποιώντας την αρίθμηση με βάση το δείκτη p :

$$\mathbf{h} = \left(\underbrace{H_z^{1,1}}_1 \underbrace{H_z^{2,1}}_2 \dots \underbrace{H_z^{1,2}}_{1+N_x} \dots \underbrace{H_z^{N_x, N_y}}_{N/2} \right)^T \quad (5.13)$$

και αντίστοιχα για τα διανύσματα \mathbf{m}, \mathbf{h}^i και $\mu, \sigma^*, \dot{\mu}, \mathbf{c}_\mu, \mathbf{c}_{\sigma^*}, \dot{\mathbf{c}}_\mu$.

5.3 Κατάστρωση γραμμικού συστήματος

Οι εξισώσεις των παραγράφων Γ'.3 και Γ'.5 αναφέρονται στις συνιστώσες τού ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε κυψέλη. Αν τις προσθέσουμε κατά μέλη και τις

γράφουμε για όλες τις κυψέλες του πλέγματος, προκύπτουν N γραμμικές εξισώσεις με ισάριθμους αγνώστους. Οι άγνωστοι εδώ είναι οι τιμές του ηλεκτρικού πεδίου στο πλέγμα. Χρησιμοποιούμε για τις εξισώσεις την ίδια αρίθμηση με τις τιμές του ηλεκτρικού πεδίου και καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα τής μορφής

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.14)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{x} περιέχει τις N τιμές του (ολικού ή σκεδαζόμενου) ηλεκτρικού πεδίου.

Ο πίνακας \mathbf{A} είναι διαστάσεων $N \times N$ αραιής μορφής. Για δισδιάστατα προβλήματα με πόλωση TM, ο πίνακας έχει πέντε μη μηδενικά στοιχεία ανά γραμμή· για πόλωση TE εννιά, και στην τρισδιάστατη μορφή δεκαπέντε. Για να πάρουμε μια λεπτομερή εικόνα τής δομής του πίνακα, πρέπει να γράψουμε σε μορφή πινάκων όλες τις σχέσεις του παραρτήματος Γ'. Αυτό γίνεται στο παράρτημα Δ', όπου παρουσιάζεται αναλυτικά η κατάστροψη του γραμμικού συστήματος για τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Αποδεικνύουμε ότι η διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων Faraday και Maxwell-Ampère μπορεί να γραφεί ως (εξισώσεις (Δ'.12), (Δ'.17), σελίδα 138):

$$\mathbf{A}_e \mathbf{e} = -j\omega \text{diag}(\langle \dot{\boldsymbol{\mu}} \rangle) \mathbf{h} - \mathbf{m} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}_e^T \mathbf{h} = j\omega \text{diag}(\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle) \mathbf{e} + \mathbf{j} \quad (5.16)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A}_e ορίζεται στην παράγραφο Δ'.2 (σελίδα 138) για τη δισδιάστατη και τρισδιάστατη περίπτωση. Από τις παραπάνω εξισώσεις, με απαλοιφή του διανύσματος των τιμών του μαγνητικού πεδίου, προκύπτει η εξίσωση (Δ'.20) (σελίδα 141):

$$[\mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\boldsymbol{\mu}} \rangle)^{-1} \mathbf{A}_e - \omega^2 \text{diag}(\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle)] \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{j} - \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\boldsymbol{\mu}} \rangle)^{-1} \mathbf{m}. \quad (5.17)$$

Παρατηρούμε την ομοιότητα τής παραπάνω εξίσωσης με την αντίστοιχη τής συνεχούς περίπτωσης, η οποία δίνεται από την εξίσωση (1.3.5a) του βιβλίου του Chew (1995)³:

$$\nabla \times \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{J} - \nabla \times \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{M}. \quad (5.18)$$

Η διακριτοποιημένη μορφή τής κλίσης τής απόκλισης του ηλεκτρικού πεδίου γράφεται σε μορφή πινάκων (εξίσωση (Δ'.21) σελίδα 141):

$$\mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle) \mathbf{e} = -\mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \mathbf{c}_\epsilon \rangle) \mathbf{e}^i - \mathbf{A}_\rho \langle \boldsymbol{\rho} \rangle \quad (5.19)$$

³Επειδή εδώ θεωρούμε χρονική εξάρτηση τής μορφής $e^{+j\omega t}$ ενώ στην αναφορά θεωρείται $e^{-i\omega t}$, αντικαθιστούμε το i με $-j$.

όπου οι πίνακες \mathbf{A}_g , \mathbf{A}_ρ ορίζονται στην παράγραφο Δ'.5 (σελίδα 141) για δισδιάστατα και τρισδιάστατα προβλήματα. Ο πίνακας \mathbf{A}_g είναι συμμετρικός.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle)^{-1} \mathbf{A}_e - \omega^2 \text{diag}(\langle \dot{\epsilon} \rangle) + \mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \epsilon \rangle)] \mathbf{e} = \\ - (j\omega \mathbf{j} + \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle)^{-1} \mathbf{m} + \mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \mathbf{c}_\epsilon \rangle) \mathbf{e}^i + \mathbf{A}_\rho \langle \rho \rangle). \end{aligned}} \quad (5.20)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει το γραμμικό σύστημα της Μεθόδου Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο των Συχνοτήτων. Τα διανύσματα μέσων τιμών μπορούν να γραφούν με τη βοήθεια των πινάκων μέσων τιμών, όπως αυτοί ορίζονται στην παράγραφο Δ'.1. Εξετάζουμε τις δύο κατηγορίες προβλημάτων όπου το γραμμικό σύστημα παίρνει πιο ειδική μορφή.

5.3.1 Προβλήματα κλειστής γεωμετρίας και ακτινοβολίας

Το διάνυσμα \mathbf{e}^i στο δεξί μέλος της (5.20) είναι μηδέν, οπότε αναφερόμενοι στη (5.14) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mu})^{-1} \mathbf{A}_e + (\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{I}) \text{diag}(\mathbf{V}_e \epsilon) + j\omega \text{diag}(\mathbf{V}_e \sigma) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= -(j\omega \mathbf{j} + \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mu})^{-1} \mathbf{m} + \mathbf{A}_\rho \mathbf{V}_\rho \rho). \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3.2 Προβλήματα σκέδασης

Τα ρεύματα στο δεξί μέλος της (5.20) αναλύονται σε εφαρμοσμένα και επαγόμενα, όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 4.4. Οι σχέσεις (4.12) σε μορφή πινάκων δίνουν:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{\text{ind}} &= j\omega \text{diag}(\mathbf{V}_e \dot{\mathbf{c}}_e) \mathbf{e}^i \\ \mathbf{m}^{\text{ind}} &= j\omega \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mathbf{c}}_m) \mathbf{h}^i. \end{aligned}$$

Το διάνυσμα τιμών της πυκνότητας ηλεκτρικών φορτίων στο δεξί μέλος της (5.20) αφορά αποκλειστικά την πυκνότητα $\rho^{(s)}$, όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (4.11) (σελίδα 68), γιατί η $\rho^{(\text{ind})}$ έχει ληφθεί ήδη υπόψη στη διακριτοποίηση του νόμου Gauss.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mu})^{-1} \mathbf{A}_e + (\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{I}) \text{diag}(\mathbf{V}_e \epsilon) + j \omega \text{diag}(\mathbf{V}_e \sigma) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{e}^s \\ \mathbf{b} &= -(j \omega \mathbf{j}^s + \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mu})^{-1} \mathbf{m}^s + \mathbf{A}_\rho \mathbf{V}_\rho \rho^s + \\ &\quad [(\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{I}) \text{diag}(\mathbf{V}_e \mathbf{c}_\epsilon) + j \omega \text{diag}(\mathbf{V}_e \mathbf{c}_\sigma)] \mathbf{e}^i + \\ &\quad j \omega \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mu})^{-1} \text{diag}(\mathbf{V}_m \dot{\mathbf{c}}_m) \mathbf{h}^i).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Παρατήρηση 5.3 Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{A} είναι πραγματικά μόνο στην περίπτωση που ο υπολογιστικός χώρος δεν παρουσιάζει ηλεκτρική ή μαγνητική αγωγιμότητα. Στην αντίθετη περίπτωση, τα στοιχεία του πίνακα είναι μιγαδικά.

Παρατήρηση 5.4 Από τις σχέσεις (5.21), (5.22) και τη συμμετρία του πίνακα \mathbf{A}_g , προκύπτει ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι συμμετρικός (όχι ερμιτιανός), δηλαδή ισχύει $A_{ij} = A_{ji}$ ή $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

5.4 Εφαρμογή οριακών συνθηκών

Θεωρούμε ότι ο υπολογιστικός χώρος περικλείεται από έναν τέλειο ηλεκτρικό αγωγό, ο οποίος τερματίζει το πλέγμα. Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες (παράγραφος 4.2, σελίδα 65), οι συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού πεδίου που είναι εφαπτομενικές στον αγωγό, καθώς και όλες οι συνιστώσες που βρίσκονται στο εσωτερικό του αγωγού, έχουν μηδενική τιμή. Στην περίπτωση προβλημάτων σκέδασης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν πάνω στο φανταστικό αυτό αγωγό, οπότε οι οριακές συνθήκες επιβάλλουν στο σκεδαζόμενο πεδίο να είναι επίσης μηδενικό εκεί.

Ανάλογες συνθήκες ισχύουν και στην περίπτωση που κάποιες περιοχές του υπολογιστικού χώρου καταλαμβάνονται από τέλειο ηλεκτρικό αγωγό. Η διαφορά είναι ότι, για προβλήματα σκέδασης, το σκεδαζόμενο πεδίο πάνω και μέσα στον αγωγό πρέπει να είναι αντίθετο του προσπίπτοντος, έτσι ώστε το ολικό πεδίο να είναι μηδέν.

Για να υλοποιηθούν τα παραπάνω, πρέπει να τροποποιήσουμε τον πίνακα \mathbf{A} και το διάνυσμα \mathbf{b} του γραμμικού συστήματος (5.14), επιβάλλοντας συγκεκριμένες τιμές (μηδέν ή το αντίθετο του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου) για κάποια στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} .

Η εφαρμογή της σχέσης $x_n = 0$ μπορεί να γίνει αν μηδενίσουμε όλα τα μη διαγώνια στοιχεία της γραμμής $\mathbf{A}_{n,*}$, θέσουμε για το στοιχείο της διαγωνίου $\mathbf{A}_{nn} = 1$ και για το αντίστοιχο στοιχείο στο δεξί μέλος $\mathbf{b}_n = 0$. Αφού

το στοιχείο x_n ισούται με μηδέν, μπορούμε να το απαλοψουμε από τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος, μηδενίζοντας όλα τα μη διαγώνια στοιχεία της στήλης $\mathbf{A}_{*,n}$. Μ' αυτόν τον τρόπο ο πίνακας \mathbf{A} παραμένει συμμετρικός.

Για την εφαρμογή της σχέσης $x_n = -e_n^i$ μηδενίζουμε όλα τα μη διαγώνια στοιχεία της γραμμής $\mathbf{A}_{n,*}$, θέτουμε πάλι για το στοιχείο της διαγωνίου $A_{nn} = 1$ και για το αντίστοιχο στοιχείο στο δεξί μέλος $b_n = -e_n^i$. Σ' αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να μηδενίσουμε την αντίστοιχη στήλη του πίνακα \mathbf{A} , γιατί το x_n δεν είναι μηδενικό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο πίνακας \mathbf{A} να μην είναι πλέον συμμετρικός.

Σε μερικά προβλήματα, επιθυμούμε να εφαρμόσουμε συγκεκριμένες τιμές σε ορισμένες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου, ώστε να δημιουργήσουμε επιθυμητές διαφορές δυναμικού. Αν συμβολίσουμε με \mathbf{v} το διάνυσμα τιμών των δυναμικών, τότε οι εφαρμογή της οριακής συνθήκης $x_n = v_n$ γίνεται όπως στην προηγούμενη παράγραφο: μηδενίζουμε όλα τα μη διαγώνια στοιχεία της γραμμής $\mathbf{A}_{n,*}$, θέτουμε για το στοιχείο της διαγωνίου $A_{nn} = 1$ και για το αντίστοιχο στοιχείο στο δεξί μέλος $b_n = v_n$. Ο πίνακας \mathbf{A} παύει να είναι συμμετρικός μετά από αυτή την τροποποίηση.

Με βάση τα παραπάνω, το σύστημα (5.14) γράφεται:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \quad (5.23)$$

όπου

$$\mathbf{A}' = \mathbf{I}_{\overline{\mathbf{M}}\mathbf{C}} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathbf{C}} \quad (5.24\alpha')$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}\mathbf{C}\mathbf{b} - \mathbf{I}_{\mathbf{V}}\mathbf{I}_{\overline{\mathbf{M}}}\mathbf{e}^i + \mathbf{v}. \quad (5.24\beta')$$

Οι καινούριοι πίνακες που εμφανίζονται στις εξισώσεις (5.24) ορίζονται στο παράρτημα Ε'. Πρόκειται για διαγώνιους πίνακες, των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία ισούνται με τη μονάδα. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα (ή διανύσματος) από αριστερά με έναν από τους παραπάνω «πίνακες περιορισμένης ταυτότητας» έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό των γραμμών (ή στοιχείων) που αντιστοιχούν σε μηδενικές γραμμές του πίνακα περιορισμένης ταυτότητας. Ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με έναν πίνακα περιορισμένης ταυτότητας έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό των αντίστοιχων στηλών.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1 (σελίδα 75), η διακριτοποιημένη κλίση της εξίσωσης Gauss δεν πρέπει να εφαρμοστεί για συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου που είναι εσωτερικές, επαπτομενικές ή κάθετες σε τέλειους αγωγούς. Οι μηδενισμοί που επιβάλλονται με τις σχέσεις (5.24) έχουν ως αποτέλεσμα η διακριτοποιημένη κλίση να μην εφαρμόζεται για τις συνιστώσες που είναι εσωτερικές ή επαπτομενικές σε αγωγούς. Για τη μη εφαρμογή στις κάθετες

συνιστώσες, τροποποιούμε ξεχωριστά τους πίνακες της εξίσωσης (5.19):

$$\mathbf{A}'_{\mathbf{g}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_n \mathbf{C}_n} \mathbf{A}_{\mathbf{g}} \quad (5.25\alpha')$$

$$\mathbf{A}'_{\rho} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_n \mathbf{C}_n} \mathbf{A}_{\rho} \quad (5.25\beta')$$

όπου οι πίνακες $\mathbf{I}_{\mathbf{C}_n}$, $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_n}$ ορίζονται στο παράρτημα Ε'. Πρόκειται για πίνακες περιορισμένης ταυτότητας οι οποίοι αναφέρονται αποκλειστικά στις συνιστώσες που είναι κάθετες στον εξωτερικό αγωγό και στους αγωγούς του υπολογιστικού χώρου, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τέλειοι ηλεκτρικοί αγωγοί στον υπολογιστικό χώρο, ισχύει $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_n} = \mathbf{I}$.

Παρατήρηση 5.5 Ο τροποποιημένος πίνακας $\mathbf{A}'_{\mathbf{g}}$ δεν είναι συμμετρικός, ακόμη και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν αγωγοί στον υπολογιστικό χώρο. Ως συνέπεια αυτού, ο πίνακας \mathbf{A}' του γραμμικού συστήματος δεν είναι συμμετρικός.

Παρατήρηση 5.6 Οι σχέσεις (5.24) και (5.25) επιβάλλουν τις κατάλληλες οριακές συνθήκες τέλειου ηλεκτρικού αγωγού. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής τους είναι ότι το γραμμικό σύστημα είναι πλέον συνεπές, με την έννοια ότι δεν εμφανίζονται πουθενά συνιστώσες ηλεκτρικού πεδίου εκτός πλέγματος, ή ιδιότητες κυψελών που δεν υπάρχουν. Αν δεν εφαρμοστούν αυτοί οι μηδενισμοί, τότε οι εξισώσεις του Παραρτήματος Γ' και, αντίστοιχα, οι πίνακες του Παραρτήματος Δ', χάνουν το νόημά τους κοντά στα άκρα του πλέγματος ή σε τέλειους αγωγούς.

Παρατήρηση 5.7 Στο γραμμικό σύστημα (5.23) υπάρχουν άγνωστοι των οποίων οι τιμές είναι δεδομένες από τις οριακές συνθήκες. Οι άγνωστοι αυτοί μπορούν να απαλειφθούν από το γραμμικό σύστημα, αν τροποποιήσουμε κατάλληλα το δεξί μέλος. Για παράδειγμα, αν $x_n = \alpha$, τότε θέτουμε το δεξί μέλος ίσο με $\mathbf{b}' - \alpha \mathbf{A}'_{*,n}$ και διαγράφουμε τη n -οστή στήλη και γραμμή από τον πίνακα \mathbf{A}' καθώς και το n -οστό στοιχείο του διανύσματος \mathbf{b}' . Μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε ένα συμπυκνωμένο (condensed) γραμμικό σύστημα, το οποίο περιέχει λιγότερους αγνώστους.

5.5 Απορροφητικές οριακές συνθήκες

Ένα από τα βασικά θέματα σε όλες τις πεπερασμένες μεθόδους είναι ο τερματισμός του πλέγματος για ανοιχτά προβλήματα (ακτινοβολία/σκέδαση). Η κατάλληλη τεχνική προσομοιώνει τον άπειρης έκτασης ανοιχτό χώρο με βάση τον πεπερασμένης έκτασης υπολογιστικό χώρο. Μια αναλυτική παρουσίαση των διαφόρων τοπικών απορροφητικών συνθηκών παρουσιάζεται στο έ-

βδομο κεφάλαιο του βιβλίου του Taflove (1995). Εδώ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των Τέλεια Προσαρμοσμένων Στρωμάτων (Perfectly Matched Layers, PML) (Bérenger, 1994). Μια γενική παρουσίαση των ΤΗΣ βρίσκεται στο πέμπτο κεφάλαιο του Taflove (1998).

Τα ΤΗΣ παρουσιάζουν πολύ καλύτερες επιδόσεις συγκριτικά με άλλες οριακές απορροφητικές συνθήκες που είχαν αναπτυχθεί πριν από αυτά (Kantartzis and Tsiboukis, 1997) και χρησιμοποιούνται σήμερα ευρέως για τον τερματισμό του πλέγματος. Έχουν παρουσιαστεί σε δύο κυρίως μορφές, χωρισμένου και μη χωρισμένου πεδίου. Η μορφή χωρισμένου πεδίου είτε εισάγει έναν τεχνητό χωρισμό πεδίων (Bérenger, 1994, Mittra and Pekel, 1995) είτε χρησιμοποιεί ένα μετασχηματισμό των χωρικών συντεταγμένων (Chew and Weedon, 1994) που καταλήγει σε τροποποιημένες εξισώσεις. Στη μορφή μη χωρισμένου πεδίου, τα ΤΗΣ είναι ανισοτροπικά υλικά με κατάλληλα επιλεγμένες παραμέτρους (Sacks et al., 1995, Gedney, 1996, Zhao and Cangellaris, 1996). Για τον τερματισμό του πλέγματος της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τα ΤΗΣ στη μορφή ανισοτροπικών μέσων.

Ο όρος «τέλεια προσαρμογή» δηλώνει ότι στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στον υπολογιστικό χώρο και τα ΤΗΣ, ο συντελεστής ανάκλασης είναι θεωρητικά ίσος με μηδέν, ανεξαρτήτως της συχνότητας και της γωνίας πρόσπτωσης. Ένα κύμα που προσπίπτει στα ΤΗΣ, διαδίδεται στο εσωτερικό αυτών χωρίς να ανακλαστεί προς τον υπολογιστικό χώρο.

Η ιδιότητα της τέλει προσαρμογής δεν είναι από μόνη της αρκετή για να λύσει το πρόβλημα του τερματισμού του πλέγματος, αφού και τα ΤΗΣ πρέπει να έχουν πεπερασμένο πάχος. Η δεύτερη ιδιότητα των ΤΗΣ είναι ότι προκαλούν εξασθένιση κατά μια επιθυμητή διεύθυνση, απορροφώντας το κύμα που διαδίδεται στο εσωτερικό τους.

Πρακτικά, ο υπολογιστικός χώρος περικλείεται από μια σειρά ΤΗΣ πεπερασμένου πάχους τα οποία τερματίζονται σε έναν τέλει ηλεκτρικό αγωγό, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ένα κύμα που εισέρχεται στα ΤΗΣ και διαδίδεται στο εσωτερικό τους, ανακλάται στον τέλει αγωγό, διαδίδεται και πάλι στα ΤΗΣ και επιστρέφει στον υπολογιστικό χώρο εξασθενημένο, ως ανεπιθύμητη αριθμητική ανάκλαση. Το πάχος των ΤΗΣ και η απορρόφηση που αυτά επιφέρουν καθορίζουν την τιμή του συντελεστή αριθμητικής ανάκλασης. Το πλήθος των στρωμάτων που απαιτούνται για ικανοποιητική απορρόφηση, τα χαρακτηριστικά των στρωμάτων αυτών και ο συντελεστής ανάκλασης που προκύπτει έχουν αποτελέσει το αντικείμενο πολλών δημοσιεύσεων (Bérenger, 1996, Fang and Wu, 1996, Wu and Fang, 1996, Winton and Rappaport, 2000, Juntunen et al., 2001). Ο βασικός στόχος είναι να βρεθεί μια βέλτιστη λύση, η οποία να ελαχιστοποιεί τις αριθμητικές ανακλάσεις.

5.5.1 Ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες

Για ένα ΤΗΣ με απορρόφηση κατά μήκος του άξονα x , προσαρμοσμένο σε μέσο με διαγώνιους ταυιστές $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$, οι ταυιστές τής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας και τής μαγνητικής διαπερατότητας παίρνουν τη μορφή (Zhao and Cangellaris, 1996, Mitchell et al., 1999):

$$\bar{\epsilon}_{\text{PML}} = \bar{\epsilon} \cdot \bar{\Lambda}_x \quad (5.26\alpha')$$

$$\bar{\mu}_{\text{PML}} = \bar{\mu} \cdot \bar{\Lambda}_x \quad (5.26\beta')$$

όπου:

$$\bar{\Lambda}_x = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

και

$$s_x = \kappa_x - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0}, \quad \kappa_x \geq 1, \quad \sigma_x \geq 0. \quad (5.28)$$

Αντίστοιχα, για ΤΗΣ με απορρόφηση κατά μήκος των αξόνων y, z , οι ταυιστές $\bar{\Lambda}$ γράφονται:

$$\bar{\Lambda}_y = \begin{bmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix} \quad \bar{\Lambda}_z = \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Στις περιοχές όπου δύο ή περισσότερα ΤΗΣ επικαλύπτονται, ο ταυιστής $\bar{\Lambda}$ είναι το γινόμενο των επιμέρους ταυιστών των στρωμάτων. Έτσι, στις ακμές και τις γωνίες του υπολογιστικού χώρου, ο ταυιστής $\bar{\Lambda}$ είναι το γινόμενο δύο και τριών όρων, αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζεται μια τομή του επιπέδου xz με τους ταυιστές που αντιστοιχούν στα διάφορα προσαρμοσμένα στρώματα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, $\bar{\Lambda}_{xz} = \bar{\Lambda}_x \cdot \bar{\Lambda}_z$.

5.5.2 Χαρακτηριστικά διάδοσης

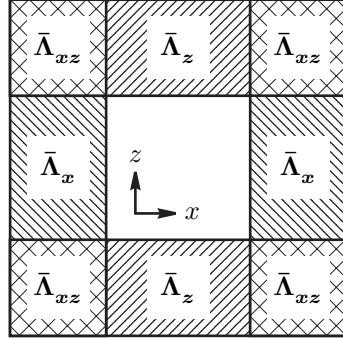
Θεωρούμε την περίπτωση ΤΗΣ προσαρμοσμένων σε ιστροπικό, μη μαγνητικό μέσο με $\bar{\epsilon} = \epsilon \bar{\mathbf{I}}_3$ και $\bar{\mu} = \mu_0 \bar{\mathbf{I}}_3$. Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η τομή, στο επίπεδο xz , τής διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ του υπολογιστικού χώρου και του ΤΗΣ.

Έστω ότι στο ΤΗΣ προσπίπτει ένα επίπεδο κύμα τής μορφής $e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}}$ όπου:

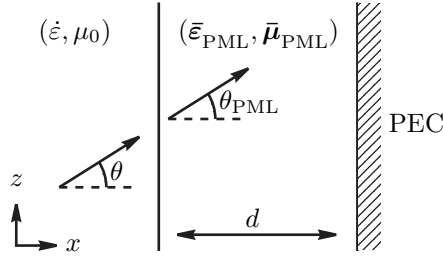
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y} + \alpha_z \hat{z}$$

$$\beta = \beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y} + \beta_z \hat{z}.$$



Σχήμα 5.2: Γωνιακά Τέλεια Προσαρμοσμένα Στρώματα.



Σχήμα 5.3: Διαχωριστική επιφάνεια Τέλειου Προσαρμοσμένου Στρώματος.

Όπως αποδεικνύεται (Zhao and Cangellaris, 1996), για τις σταθερές διάδοσης στο εσωτερικό των ΤΠΣ ισχύει:

$$\gamma_x^{pml} = s_x \gamma_x = \alpha_x \kappa_x + \beta_x \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0} + j \left(\beta_x \kappa_x - \alpha_x \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0} \right) \quad (5.30\alpha')$$

$$\gamma_y^{pml} = \gamma_y \quad (5.30\beta')$$

$$\gamma_z^{pml} = \gamma_z \quad (5.30\gamma')$$

ενώ η γωνία διέλευσης ισούται με τη γωνία πρόσπτωσης.

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, ο ρόλος της αγωγιμότητας σ_x είναι να συνεισφέρει στο πραγματικό μέρος της σταθεράς διάδοσης γ_x^{pml} . Η συνεισφορά αυτή δημιουργεί απώλειες κατά τη διάδοση στον άξονα x , πέρα από τις απώλειες που ήδη παρουσιάζει το μέσο στο οποίο είναι προσαρμοσμένο το ΤΠΣ. Η αδιάστατη σταθερά κ_x αυξάνει την απορρόφηση των evanescent κυμάτων, πολλαπλασιάζοντας το α_x .

Παρατήρηση 5.8 Το φανταστικό μέρος του γ_x^{pm} δεν είναι ίσο με εκείνο του γ_x . Τα δύο μέσα δεν παρουσιάζουν την ίδια φασική ταχύτητα παρά μόνο όταν $\kappa_x = 1$ και ένα από τα σ_x ή α_x είναι μηδέν.

5.5.3 Θεωρητικός συντελεστής ανάκλασης

Ένα κύμα που εισέρχεται στα ΤΗΣ και ανακλάται στον τέλει αγωγό, επιστρέφει στον υπολογιστικό χώρο αφού έχει υποστεί απορρόφηση. Ορίζουμε ως θεωρητικό συντελεστή ανάκλασης το λόγο του κύματος που επιστρέφει στον υπολογιστικό χώρο προς εκείνο που εισέρχεται στα ΤΗΣ. Αναφερόμενοι στο Σχήμα 5.3 και θεωρώντας $\gamma = j\mathbf{k}$ ($k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$), το μέτρο του θεωρητικού συντελεστή ανάκλασης γράφεται:

$$\begin{aligned} |R(\theta)| &= \left| e^{-jk_x^{pm}2d} \right| \\ &= e^{-2\{\eta_0\Re(\sqrt{\epsilon_r})\sigma_x + \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\Im(\sqrt{\epsilon_r})\}\cos\theta d} \end{aligned} \quad (5.31)$$

όπου $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ η χαρακτηριστική εμπέδηση του κενού και $\epsilon_r = \epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$.

Σημειώνεται ότι η παραπάνω έκφραση δίνει την τιμή του συντελεστή αριθμητικών ανακλάσεων των ΤΗΣ. Ο όρος «θεωρητικός» χρησιμοποιείται διότι ο υπολογισμός έγινε με βάση τις συνεχείς εξισώσεις. Στην πράξη, όπου οι εξισώσεις είναι διακριτοποιημένες, ο συντελεστής ανάκλασης δεν έχει την τιμή που υπολογίστηκε εδώ (Wu and Fang, 1996).

Στην περίπτωση που $\sigma \ll \omega\epsilon_0$, έχουμε:

$$|R(0)| = e^{-2\eta_0\sqrt{\epsilon_r}\sigma_x d} \quad (5.32)$$

ή

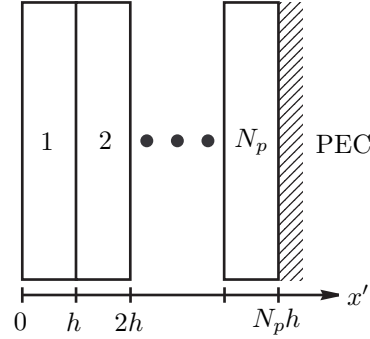
$$\sigma_x d = -\frac{\ln |R(0)|}{2\eta_0\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (5.33)$$

Αν η τιμή της αγωγιμότητας σ_x μεταβάλλεται συναρτήσει του βάθους στο εσωτερικό του ΤΗΣ, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\int_0^d \sigma_x(x') dx' = -\frac{\ln |R(0)|}{2\eta_0\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (5.34)$$

5.5.4 Προφίλ αγωγιμότητας

Σύμφωνα με τη σχέση (5.32), ο συντελεστής αριθμητικής ανάκλασης μειώνεται εκθετικά όσο αυξάνεται το γινόμενο $\sigma_x d$. Για καθαρά υπολογιστικούς λόγους, το πάχος d των ΤΗΣ δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλο, γιατί αυτό θα οδηγούσε σε αυξημένη πολυπλοκότητα του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά,



Σχήμα 5.4: Πολλαπλά Τέλεια Προσαρμοσμένα Στρώματα.

αν χρησιμοποιήσουμε ΤΗΣ με μεγάλες τιμές αγωγιμότητας, θα υπάρχουν ανεπιθύμητες ανακλάσεις στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του υπολογιστικού χώρου και του ΤΗΣ. Αυτό συμβαίνει γιατί η ιδιότητα της τέλει προσαρμογής ισχύει μόνο για τη συνεχή μορφή των εξισώσεων, ενώ στη διακριτοποιημένη μορφή υπάρχουν πάντα ανακλάσεις (Wu and Fang, 1996).

Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε μια σειρά από N_p στρώματα, το καθένα πάχους όσο μια κυψέλη του πλέγματος. Οι ιδιότητες των ΤΗΣ μεταβάλλονται από στρώμα σε στρώμα. Εκείνα που βρίσκονται κοντά στο εσωτερικό του υπολογιστικού χώρου έχουν μικρά σ_x, κ_x ώστε να μην παρουσιάζουν ανακλάσεις, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από το εσωτερικό οι τιμές των σ_x, κ_x μεγαλώνουν ώστε να έχουμε ισχυρότερη απόσβεση. Η μεταβολή των παραμέτρων δίνεται μέσω των συναρτήσεων $\sigma_x(x'), \kappa_x(x')$. Σε κάθε ΤΗΣ αποδίδουμε τη μέση τιμή των συναρτήσεων πάνω στην αντίστοιχη κυψέλη (Σχήμα 5.4):

$$\sigma_{xi} = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \sigma_x(x') dx' \quad (5.35\alpha')$$

$$\kappa_{xi} = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \kappa_x(x') dx' \quad (5.35\beta')$$

όπου $i = 1, \dots, N_p$.

Παρουσιάζουμε τις δύο βασικές μορφές μεταβολής των παραμέτρων των ΤΗΣ, συναρτήσει της απόστασης x' από τη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του υπολογιστικού χώρου και του πρώτου ΤΗΣ (Bérenger, 1996).

Πολυωνυμική μεταβολή: Οι παράμετροι σ_x, κ_x δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_x(x') = \sigma_{\max} \left(\frac{x'}{d} \right)^m \quad (5.36\alpha')$$

$$\kappa_x(x') = 1 + (\kappa_{\max} - 1) \left(\frac{x'}{d} \right)^m. \quad (5.36\beta')$$

Τότε, από τις σχέσεις (5.34), (5.35) προκύπτει ότι:

$$\sigma_{\max} = -\frac{\ln |R(0)|}{2\eta_0\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{m+1}{N_p h} \quad (5.37\alpha')$$

$$\sigma_{xi} = \frac{\sigma_{\max}}{(m+1)N_p^m} [i^{m+1} - (i-1)^{m+1}] \quad (5.37\beta')$$

$$\kappa_{xi} = 1 + \frac{\kappa_{\max} - 1}{(m+1)N_p^m} [i^{m+1} - (i-1)^{m+1}]. \quad (5.37\gamma')$$

Γεωμετρική μεταβολή: Οι παράμετροι σ_x, κ_x δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_x(x') = \sigma_0 g^{x'/h} \quad (5.38\alpha')$$

$$\kappa_x(x') = q^{x'/h}. \quad (5.38\beta')$$

Τότε, από τις (5.34), (5.35) προκύπτει ότι:

$$\sigma_0 = \begin{cases} -\frac{\ln |R(0)|}{2\eta_0\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\ln g}{(g^{N_p}-1)h} & g > 1 \\ -\frac{\ln |R(0)|}{2\eta_0\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{N_p h} & g = 1 \end{cases} \quad (5.39\alpha')$$

$$\sigma_{xi} = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\ln g} \left(1 - \frac{1}{g} \right) g^i & g > 1 \\ \sigma_0 & g = 1 \end{cases} \quad (5.39\beta')$$

$$\kappa_{xi} = \begin{cases} \frac{1}{\ln q} \left(1 - \frac{1}{q} \right) q^i & q > 1 \\ 1 & q = 1 \end{cases}. \quad (5.39\gamma')$$

5.6 Μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο

Σε πολλά ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα μάς ενδιαφέρει η λύση στο μακρινό πεδίο. Είναι φανερό ότι ο υπολογιστικός χώρος δεν μπορεί να εκτείνεται μέχρι την περιοχή του μακρινού πεδίου, καθώς σ' αυτή την περίπτωση οι απαιτήσεις σε υπολογιστικούς πόρους και χρόνο θα ήταν εξωπραγματικές. Μπορούμε, όμως, να περιορίσουμε τον υπολογιστικό χώρο στην περιοχή του κοντινού πεδίου, να

υπολογίσουμε το πεδίο εκεί και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας κατάλληλες τεχνικές, να υπολογίσουμε το μακρινό πεδίο με βάση το κοντινό. Δύο είναι οι βασικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται γι' αυτό το σκοπό.⁴

Η πρώτη τεχνική βασίζεται στο θεώρημα ισοδυναμίας του ηλεκτρομαγνητισμού (Schelkunoff, 1936). Για τον υπολογισμό κάθε συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού μακρινού πεδίου, απαιτείται ο υπολογισμός κλειστών επιφανειακών ολοκληρωμάτων του ηλεκτρικού και μαγνητικού κοντινού πεδίου πάνω σε μια κοινή επιφάνεια. Καθώς στο σχήμα του Yee το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο δεν ορίζονται στην ίδια επιφάνεια, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή (Demarest et al., 1996, Martin, 1998).

Η δεύτερη τεχνική βασίζεται στο ολοκλήρωμα Kirchhoff (Jackson, 1975). Μια εφαρμογή της στο πεδίο του χρόνου παρουσιάζεται από τον Ramahi (1997). Για τον υπολογισμό μιας συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού μακρινού πεδίου, απαιτείται ο υπολογισμός ενός κλειστού επιφανειακού ολοκληρώματος μόνο της ίδιας συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού κοντινού πεδίου. Η τεχνική αυτή είναι απλούστερη και προσφέρεται καλύτερα για εφαρμογή σε μεθόδους πεπερασμένων διαφορών.

5.6.1 Ολοκλήρωμα Kirchhoff

Θεωρούμε ότι όλες οι πηγές και οι σκεδαστές του προβλήματος βρίσκονται στο χώρο V , ο οποίος περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S . Ο χώρος στο εξωτερικό της επιφάνειας S είναι το κενό. Συμβολίζουμε με $\hat{\mathbf{n}}'$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του όγκου V . Για το πεδίο των συχνοτήτων, σημείο εκκίνησης είναι το ολοκλήρωμα Kirchhoff, όπως δίνεται από τη σχέση (9.125) του Jackson (1975)⁵:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{-jkR}}{R} \left[\frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \left(jk + \frac{1}{R} \right) \frac{1}{R} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{R} \psi(\mathbf{r}') \right] d\alpha \quad (5.40)$$

όπου

- ψ οποιαδήποτε από τις ορθογώνιες συνιστώσες του πεδίου \mathbf{E} ή \mathbf{H}
- \mathbf{r} σημείο παρατήρησης, στο μακρινό πεδίο
- \mathbf{r}' σημείο πάνω στην S , στο κοντινό πεδίο

⁴Η παράγραφος αυτή αφορά αποκλειστικά τρισδιάστατα προβλήματα.

⁵Ισχύει η παρατήρηση της υποσημείωσης 3, σελίδα 78.

και

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ R &= |\mathbf{R}| \\ k &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}.\end{aligned}$$

Αν και η επιλογή τής επιφάνειας S είναι αυθαίρετη, το ορθογώνιο ομοιόμορφο πλέγμα μάς υπαγορεύει να χρησιμοποιήσουμε έναν κύβο. Μ' αυτόν τον τρόπο το επιφανειακό ολοκλήρωμα προσεγγίζεται από έξι διπλά αθροίσματα, όπως παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα Ζ'. Η διακριτοποιημένη μορφή τής (5.40) δίνεται από την (Ζ'.1) (σελίδα 152).

5.6.2 Αριθμητική πιστοποίηση

Εξετάζουμε την ακρίβεια τού μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο που αναπτύχθηκε παραπάνω. Ο έλεγχος γίνεται με βάση την ακτινοβολία ενός διπόλου απειροστού μήκους.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες δίπολο μήκους $l \ll \lambda$ το οποίο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, κατά μήκος τού άξονα z . Το ρεύμα τού διπόλου ισούται με $\mathbf{J}(z) = I_0\hat{\mathbf{z}}$. Για ένα τέτοιο δίπολο, το ακτινοβολούμενο ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τις σχέσεις (Balanis, 1997):

$$E_r(r, \theta, \phi) = \eta_0 \frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi r^2} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \quad (5.41\alpha')$$

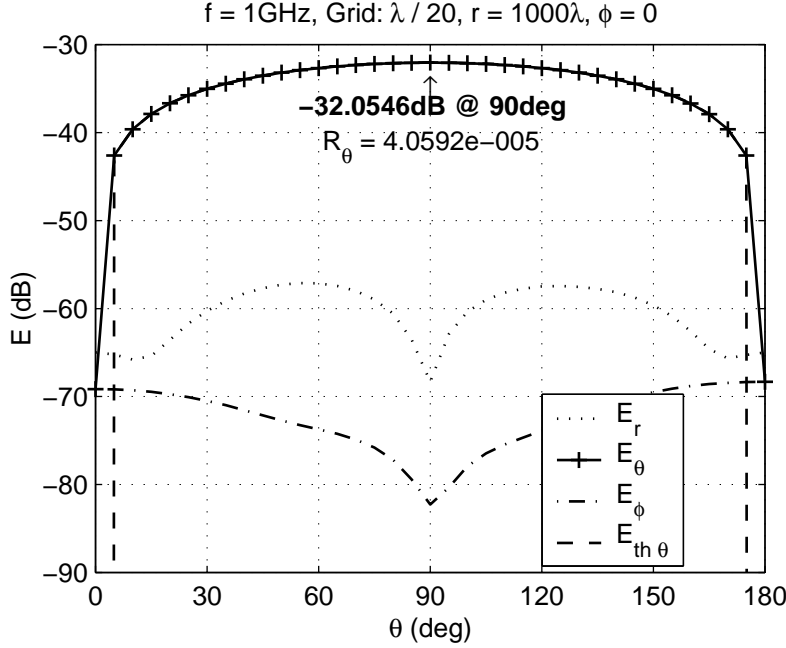
$$E_\theta(r, \theta, \phi) = j\eta_0 \frac{kI_0 l \sin\theta}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \quad (5.41\beta')$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = 0. \quad (5.41\gamma')$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για όλα τα σημεία τού χώρου (κοντινό και μακρινό πεδίο) εκτός από το σημείο $r = 0$ όπου βρίσκεται το δίπολο.

Για να επαληθεύσουμε την ακρίβεια τού μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο, υπολογίζουμε πρώτα το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο πλέγμα τού Yee (κοντινό πεδίο) χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (5.41). Με βάση τις τιμές αυτές, υπολογίζουμε το μακρινό πεδίο σύμφωνα με τη σχέση (Ζ'.1) (μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο). Συγκρίνουμε το μακρινό πεδίο που προκύπτει από το μετασχηματισμό με το αναλυτικό μακρινό πεδίο, που προκύπτει απευθείας από τις (5.41).

Το Σχήμα 5.5 περιλαμβάνει τις τρεις συνιστώσες τού μετασχηματισμένου μακρινού πεδίου, σε σφαιρικές συντεταγμένες, καθώς και τη συνιστώσα E_θ τού θεωρητικού πεδίου. Από τη σύγκριση εξαιρούμε τις τιμές στα σημεία $\theta = 0^\circ$



Σχήμα 5.5: Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο. Υπολογιστικός χώρος: (23,23,23) κόμβοι. Επιφάνεια Kirchhoff: από (2,2,2) ως (22,22,22), μήκος πλευράς 1λ , κεντραρισμένη.

και $\theta = 180^\circ$, όπου το πεδίο μηδενίζεται. Το μήκος του διπόλου επιλέγεται $l = \lambda/1000$ και το ρεύμα I_0 ίσο με τη μονάδα.

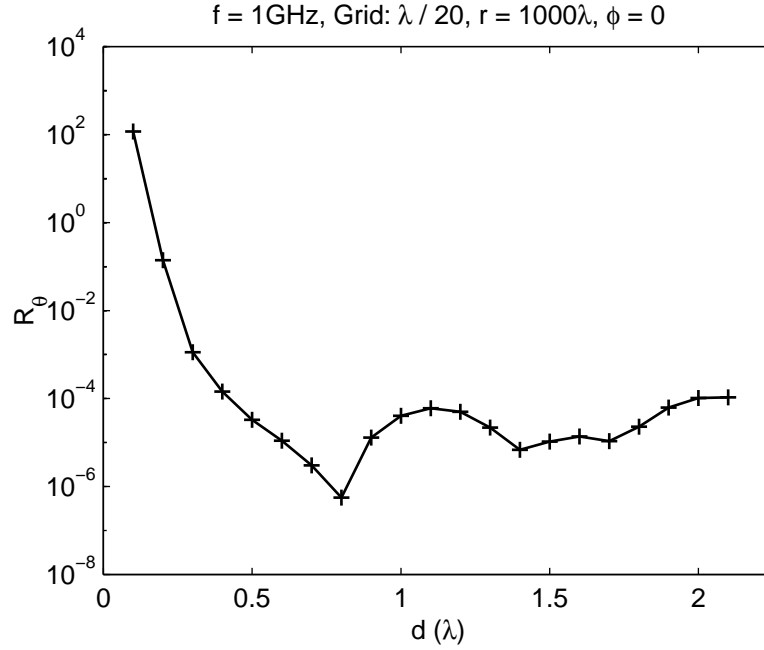
Ορίζουμε τα διανύσματα τιμών ηλεκτρικού πεδίου με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\mathbf{e}_\theta = (E_\theta(r, \theta = 5^\circ, \phi) \ E_\theta(r, \theta = 10^\circ, \phi) \ \cdots \ E_\theta(r, \theta = 175^\circ, \phi))^T$$

ενώ ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιείται το σχετικό σφάλμα:

$$R_\theta = \frac{\|\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{th\theta}\|^2}{\|\mathbf{e}_{th\theta}\|^2}.$$

Σε όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ, η επιφάνεια ολοκλήρωσης για το μετασχηματισμό του κοντινού σε μακρινό πεδίο είναι ένας κύβος. Ειδικά για το Σχήμα 5.5, ο κύβος Kirchhoff είναι κεντραρισμένος ως προς τον υπολογιστικό χώρο. Κάθε πλευρά του καταλαμβάνει είκοσι κυψέλες. Καθώς το πλέγμα έχει είκοσι κυψέλες ανά μήκος κύματος (*cells per lambda*, cpl), η πλευρά του κύβου έχει μήκος 1λ .



Σχήμα 5.6: Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσεως του μήκους d της πλευράς του κύβου Kirchhoff (επιφάνεια κεντραρισμένη).

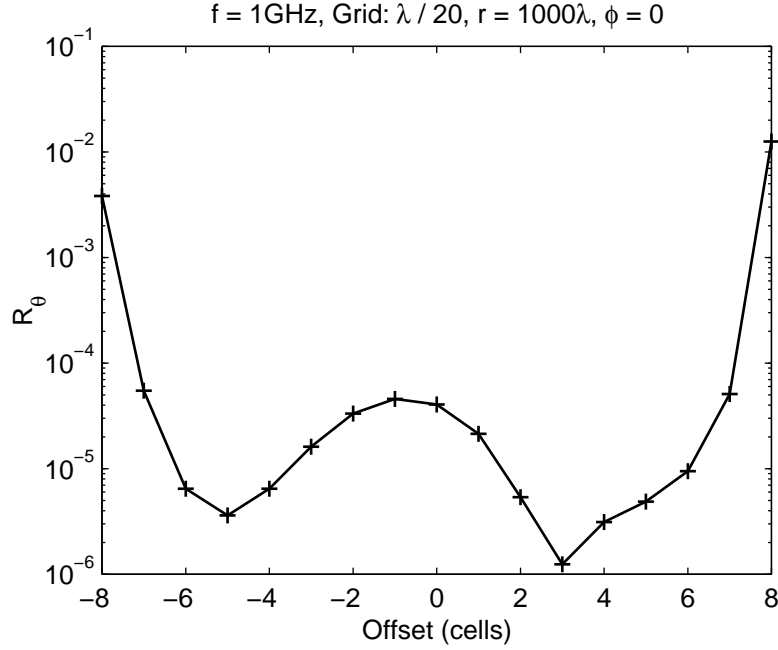
Εξετάζουμε την επίδραση που έχει το μέγεθος του κύβου ολοκλήρωσης στην ακρίβεια του μετασχηματισμού. Στο Σχήμα 5.6 (σελίδα 92) παρουσιάζεται η εξάρτηση του σφάλματος R_θ από το μήκος d της πλευράς του κύβου. Ο κύβος παραμένει κεντραρισμένος ως προς τον υπολογιστικό χώρο και το πλέγμα έχει $N^{\text{cpl}} = 20$. Παρατηρούμε ότι για $d \geq 0.5\lambda$ ισχύει $R_\theta < 10^{-4}$, με ένα σημαντικό βύθισμα στο $d = 0.8\lambda$, όπου $R_\theta < 10^{-6}$.

Ο κύβος ολοκλήρωσης μπορεί να μην είναι κεντραρισμένος ως προς τον υπολογιστικό χώρο. Αυτή η περίπτωση εξετάζεται στο Σχήμα 5.7 (σελίδα 94). Παρατηρούμε ότι το σφάλμα παραμένει πάντα μικρότερο από 10^{-4} , ακόμα και όταν ο κύβος (με μήκος πλευράς $d = 1\lambda$) έχει μετατοπιστεί αρκετές κυψέλες ως προς τη θέση που είχε στα προηγούμενα σχήματα.

Η ακρίβεια του μετασχηματισμού ελέγχεται επίσης και ως προς το μέγεθος της κυψέλης του υπολογιστικού χώρου. Θεωρούμε κύβο Kirchhoff με μήκος πλευράς $d = 1\lambda$, κεντραρισμένο ως προς τον υπολογιστικό χώρο. Η εξάρτηση του σφάλματος R_θ από τον αριθμό κυψελών ανά μήκος κύματος φαίνεται στο Σχήμα 5.8 (σελίδα 95). Όπως είναι αναμενόμενο, η εξάρτηση είναι μονότονα φθίνουσα, καθώς το πυκνότερο πλέγμα (μεγαλύτερο N^{cpl}) έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη αριθμητική προσέγγιση του ολοκληρώματος (5.40).

5.6. Μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο

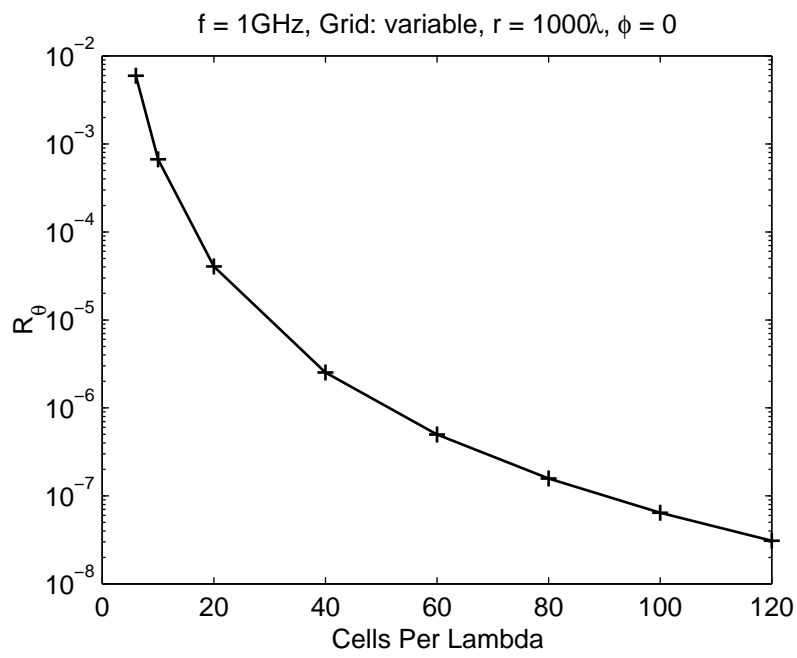
Συμπερασματικά, ο μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο έχει ακρίβεια τουλάχιστον τής τάξης του 10^{-4} όταν η επιφάνεια αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι ένας κύβος με μήκος πλευράς τουλάχιστον 0.5λ και η διακριτοποίηση του χώρου γίνεται με κυψέλες διαστάσεων τουλάχιστον $\lambda/20$.



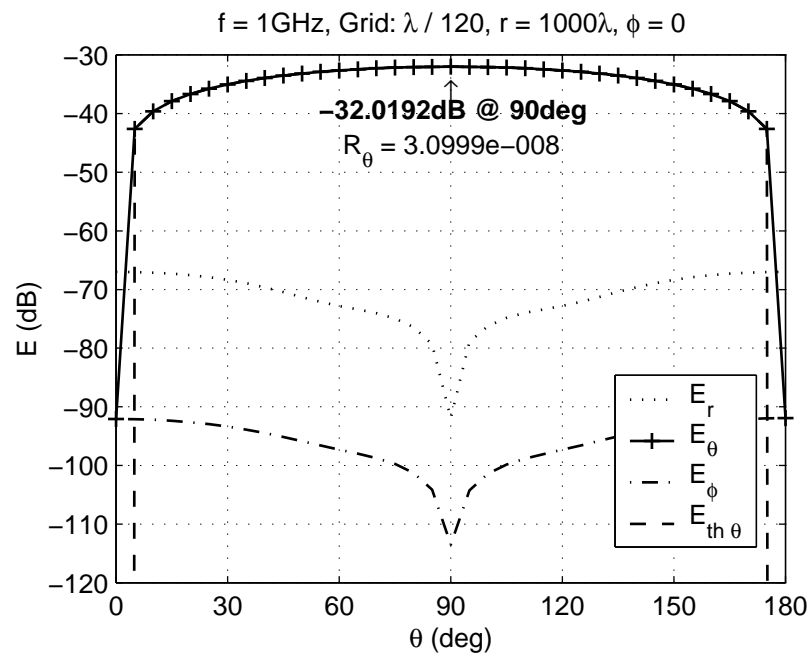
Σχήμα 5.7: Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσει της θέσης του κύβου Kirchhoff. Μηδενικό offset αντιστοιχεί σε κεντραρισμένο κύβο. Υπολογιστικός χώρος: (43, 43, 43) κόμβοι. Επιφάνεια Kirchhoff: μήκος πλευράς 20 κυψέλες (1 λ).

Ο μόνος τρόπος για να βελτιώσουμε ουσιαστικά την ακρίβεια του μετασχηματισμού είναι να χρησιμοποιήσουμε πυκνότερο πλέγμα. Το Σχήμα 5.9 (σελίδα 96) είναι αντίστοιχο με το Σχήμα 5.5 (σελίδα 91) με τη διαφορά ότι έχουν χρησιμοποιηθεί 120 κυψέλες ανά μήκος κύματος.⁶ Παρατηρούμε ότι η τιμή για την E_θ στο $\theta = 90^\circ$ μεταβάλλεται ελάχιστα, ενώ το R_θ βελτιώνεται αισθητά. Συμπεραίνουμε ότι το πυκνότερο πλέγμα οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια για μικρές και μεγάλες τιμές της γωνίας θ , εκτός ισημερινού. Επίσης, η δυναμική περιοχή των αποτελεσμάτων είναι κατά πολύ βελτιωμένη, καθώς το μετασχηματισμένο πεδίο με $N^{\text{cpl}} = 120$ έχει πολύ χαμηλότερες τιμές συνιστωσών E_r και E_ϕ , οι οποίες είναι θεωρητικά μηδενικές στο μακρινό πεδίο διπόλου.

⁶Ένα τόσο πυκνό πλέγμα έχει απαγορευτικές απαιτήσεις υπολογιστικών πόρων σε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτής της συζήτησης χωρίς πρόβλημα.



Σχήμα 5.8: Ακρίβεια μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο συναρτήσει των διαστάσεων τής κυψέλης. Επιφάνεια Kirchhoff: μήκος πλευράς 1λ , κεντραρισμένη.



Σχήμα 5.9: Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και μετασχηματισμού κοντινού σε μακρινό πεδίο. Διαστάσεις κυψέλης: $\lambda/120$.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικά αποτελέσματα

Νῦν τῶν λαῶν τὸ ἀμάλγαμα καὶ ὁ μαῦρος Ἀριθμός
Αἰὲν τῆς Δίκης τὸ ἄγαλμα καὶ ὁ μέγας Ὀφθαλμός

Εφαρμόζουμε εδώ τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, η οποία αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και στα αντίστοιχα παραρτήματα, για την αριθμητική επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Σε κάθε περίπτωση (κλειστή ή ανοιχτή γεωμετρία) παρουσιάζουμε επίσης τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την επίλυση τού σχετικού γραμμικού συστήματος.

6.1 Κλειστά προβλήματα

6.1.1 Μέθοδοι επίλυσης

Το πρόβλημα που μελετάμε συνίσταται στην εύρεση τού ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ενός κυματοδηγού (δισδιάστατο πρόβλημα) και μιας κοιλότητας (τρισδιάστατο πρόβλημα) σε μια δεδομένη συχνότητα αποκοπής/συντονισμού. Αναφερόμενοι στην εξίσωση (5.14) (σελίδα 78), αναζητούμε το διάνυσμα \mathbf{x} τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

καθώς δεν υπάρχουν πηγές στο δεύτερο μέλος ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$).

Υπενθυμίζεται ότι τα διανύσματα \mathbf{x} τα οποία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, ορίζουν το μηδενοχώρο τού πίνακα \mathbf{A} (Kreyszig, 1978). Καθώς η διάσταση τού μηδενοχώρου ισούται με τον αριθμό των ρυθμών που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη συχνότητα, συμπεραίνουμε ότι για τους μη εκφυλισμένους ρυθμούς, ο μηδενοχώρος είναι μονοδιάστατος· το διάνυσμα \mathbf{x} μπορεί, στην περίπτωση αυτή, να οριστεί με ελευθερία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Αν

όμως στην ίδια συχνότητα αντιστοιχούν N ρυθμοί, ο μηδενοχώρος έχει διάσταση N . Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε μια απειρία συνόλων από N διανύσματα, με κάθε σύνολο να αποτελεί μια βάση του χώρου· οι ρυθμοί δεν μπορούν πλέον να οριστούν με μοναδικό τρόπο, και η σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων και θεωρίας γίνεται πιο δύσκολη. Για να αποφύγουμε τέτοιου είδους προβλήματα, επιλέγουμε πάντα μη εκφυλισμένους ρυθμούς.

Η μέθοδος *singular value decomposition* (SVD), δίνει απευθείας μία βάση του μηδενοχώρου ενός πίνακα. Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα ζητούμενα διανύσματα είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα που αντιστοιχούν στη μηδενική ιδιοτιμή. Επιλέγουμε εδώ τη δεύτερη προσέγγιση. Οι ρυθμοί των κλειστών προβλημάτων υπολογίζονται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή που βρίσκεται πλησιέστερα στο μηδέν.

6.1.2 Κυματοδηγός

Θεωρούμε έναν κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής, διαστάσεων a, b κατά τους άξονες x, y , με τέλεια αγωγήμα τοιχώματα. Στον κυματοδηγό υπάρχουν δύο κατηγορίες ρυθμών (Ramo et al., 1994):

Ρυθμοί εγκάρσιας ηλεκτρικής πόλωσης κατά z , TE_{mn}^z

$$\begin{aligned} E_x &= A_{mnp} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ E_y &= -A_{mnp} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

όπου

$$m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad m + n > 0.$$

Ρυθμοί εγκάρσιας μαγνητικής πόλωσης κατά z , TM_{mn}^z

$$\begin{aligned} E_x &= B_{mnp} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ E_y &= B_{mnp} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ E_z &= -B_{mnp} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

όπου

$$m \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Η συχνότητα αποκοπής των ρυθμών TE_{mn}^z και TM_{mn}^z δίνεται από:

$$f_{mn} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{c}{\lambda_{mn}}. \quad (6.4)$$

Για να περιορίσουμε τον αριθμό των εκφυλισμένων ρυθμών, επιλέγουμε έναν κυματοδηγό με $a \neq b$, και συγκεκριμένα,

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Η συχνότητα αποκοπής δίνεται τώρα από τη σχέση:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + (3n)^2} = \frac{c}{\lambda_{mn}}.$$

Η πιο χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στο ρυθμό TE_{10}^z . Οι ανώτεροι ρυθμοί και ο λόγος $R_{mn} = f_{mn}/f_{10}$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1. Μας ενδιαφέρουν εδώ οι δύο πρώτοι ρυθμοί, που είναι μη εκφυλισμένοι.

Πίνακας 6.1: Λόγος συχνοτήτων $R_{mn} = f_{mn}/f_{10}$ για κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής, με $a/b = 3$.

TE_{10}^z	TE_{20}^z	TE_{30}^z TE_{03}^z	TE_{11}^z TM_{11}^z	TE_{21}^z TM_{21}^z
1	2	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$

Επιλέγουμε $f_{10} = 1$ GHz, το οποίο δίνει $a = 0.15$ m. Για καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων, ο αριθμός των κυψελών N_x, N_y και η διάσταση της κυψέλης h παραμένουν σταθερές, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του N^{cpl} για κάθε ρυθμό.

Ο αριθμός κυψελών κατά μήκος του άξονα x είναι ίσος με:

$$N_x = \frac{a}{h} + 1 = \frac{a}{\lambda_{mn}} N_{mn}^{\text{cpl}} + 1 \quad (6.5)$$

και, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις ανάμεσα στις διαστάσεις του κυματοδηγού:

$$N_y = \frac{b}{h} + 1 = \frac{N_x - 1}{3} + 1.$$

Σημειώνεται ότι ο όρος $+1$ στις παραπάνω σχέσεις προέρχεται από το γεγονός ότι, για παράδειγμα κατά τον άξονα x , έχουμε $\frac{a}{h}$ κυψέλες στο εσωτερικό του υπολογιστικού χώρου, και μία επιπλέον κυψέλη τής οποίας η συνιστώσα E_x βρίσκεται στο εξωτερικό του χώρου, μέσα στο φανταστικό αγωγό, και η συνιστώσα E_y είναι εφαπτομενική στα τοιχώματα του χώρου υπολογισμού.

Μπορούμε να πάρουμε μια έκφραση του αριθμού κυψελών ανά μήκος κύματος για κάθε ρυθμό, με βάση τη σχέση (6.5):

$$N_{mn}^{\text{cpl}} = (N_x - 1) \frac{2f_{10}}{f_{mn}}. \quad (6.6)$$

Για τους υπολογισμούς διαλέξαμε

$$N_x = 31, \quad N_y = 11.$$

Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο των ρυθμών TE_{10}^z και TE_{20}^z με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (Σχήμα 6.1, σελίδα 101).

Το πεδίο έχει την ημιτονοειδή μορφή που προβλέπεται από τη θεωρία. Κανονικοποιούμε το θεωρητικό πεδίο – υπολογισμένο από την (6.2) – και το αριθμητικό πεδίο ώστε να έχουν τη ίδια μέγιστη τιμή. Οι συγκρίσεις δείχνουν ότι η απόσταση των διανυσμάτων $\|\mathbf{e}_{\text{th}} - \mathbf{e}_{\text{num}}\|$ είναι τής τάξης του 10^{-14} , μια τιμή πολύ κοντά στο αριθμητικό μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών υπολογίζει τους ρυθμούς ενός κυματοδηγού με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

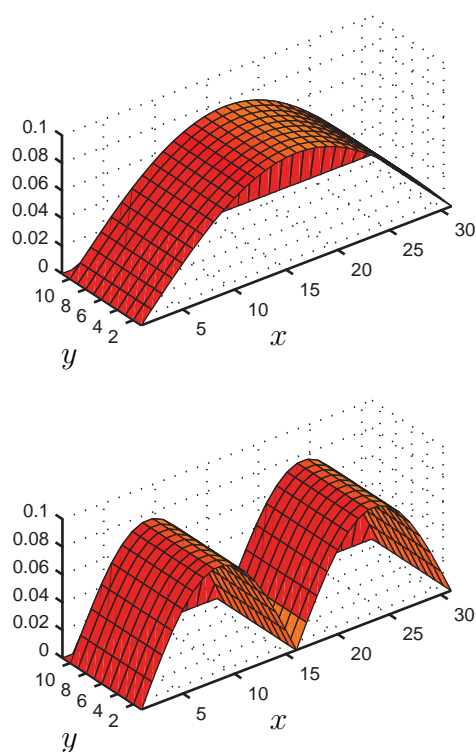
Στο Σχήμα 6.1, η συνιστώσα E_y του πεδίου μηδενίζεται στην τελευταία κυψέλη του πλέγματος κατά τη διεύθυνση του άξονα y . Αυτό είναι φυσικό, γιατί η συνιστώσα E_y σ' αυτή την κυψέλη βρίσκεται εκτός του υπολογιστικού χώρου, στο εσωτερικό των μεταλλικών τοιχωμάτων που τον περιβάλλουν.

6.1.3 Συντονιζόμενη κοιλότητα

Θεωρούμε μια κοιλότητα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, διαστάσεων a, b, c κατά τους άξονες x, y, z , με τέλεια αγωγή τοιχώματα. Επιλέγοντας τον άξονα z ως άξονα αναφοράς, έχουμε δύο κατηγορίες ρυθμών (Ramo et al., 1994):

Ρυθμοί εγκάρσιας ηλεκτρικής πόλωσης κατά z , TE_{mnp}^z

$$\begin{aligned} E_x &= A_{mnp} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ E_y &= -A_{mnp} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$



Σχήμα 6.1: Συνιστώσα E_y τού ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών TE_{10}^z (πάνω) και TE_{20}^z (κάτω) ενός κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής, με $a/b = 3$. Οι αριθμοί στους άξονες x, y αναφέρονται σε κυψέλες.

όπου

$$m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad p \geq 1, \quad m + n > 0.$$

Ρυθμοί εγκάρσιας μαγνητικής πόλωσης κατά z , TM_{mnp}^z

$$\begin{aligned} E_x &= B_{mnp} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{c} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ E_y &= B_{mnp} \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{c} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ E_z &= -B_{mnp} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

όπου

$$m \geq 1, \quad n \geq 1, \quad p \geq 0.$$

Η συχνότητα συντονισμού των ρυθμών TE_{mnp}^z και TM_{mnp}^z δίνεται από:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2} = \frac{c}{\lambda_{mnp}}. \quad (6.9)$$

Επιλέγουμε, όπως πριν, διαστάσεις $a \neq b \neq c$, και συγκεκριμένα,

$$\frac{a}{b} = 3, \quad \frac{a}{c} = 2.$$

Η συχνότητα συντονισμού δίνεται από τη σχέση:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + (3n)^2 + (2p)^2} = \frac{c}{\lambda_{mnp}}.$$

Η πιο χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στο ρυθμό TE_{101}^z . Οι επόμενοι ρυθμοί, και ο λόγος $R_{mnp} = f_{mnp}/f_{101}$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.2. Μας ενδιαφέρουν εδώ οι τρεις πρώτοι ρυθμοί, όλοι μη εκφυλισμένοι.

Επιλέγουμε $f_{101} = 1 \text{ GHz}$, και έχουμε $a = 0.15\sqrt{5} \text{ m}$. Ο αριθμός των κυψελών N_x, N_y, N_z και η διάσταση κάθε κυψέλης h παραμένουν σταθερά, με αποτέλεσμα ο αριθμός κυψελών ανά μήκος κύματος N^{cpl} να είναι διαφορετικός για κάθε ρυθμό.

Με την ίδια διαδικασία όπως πριν, παίρνουμε τη σχέση

$$N_{mnp}^{\text{cpl}} = (N_x - 1) \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{f_{101}}{f_{mnp}}. \quad (6.10)$$

Πίνακας 6.2: Λόγος συχνοτήτων $R_{mnp} = f_{mnp}/f_{101}$ για ορθογωνική κοι-
λότητα, με $a/b = 3$ και $a/c = 2$.

TE_{101}^z	TE_{201}^z	TM_{110}^z	TE_{011}^z TE_{301}^z TM_{210}^z	TE_{111}^z TM_{111}^z
1	$\sqrt{8/5}$	$\sqrt{10/5}$	$\sqrt{13/5}$	$\sqrt{14/5}$

Για τους υπολογισμούς θεωρούμε:

$$N_x = 31, \quad N_y = 11, \quad N_z = 16.$$

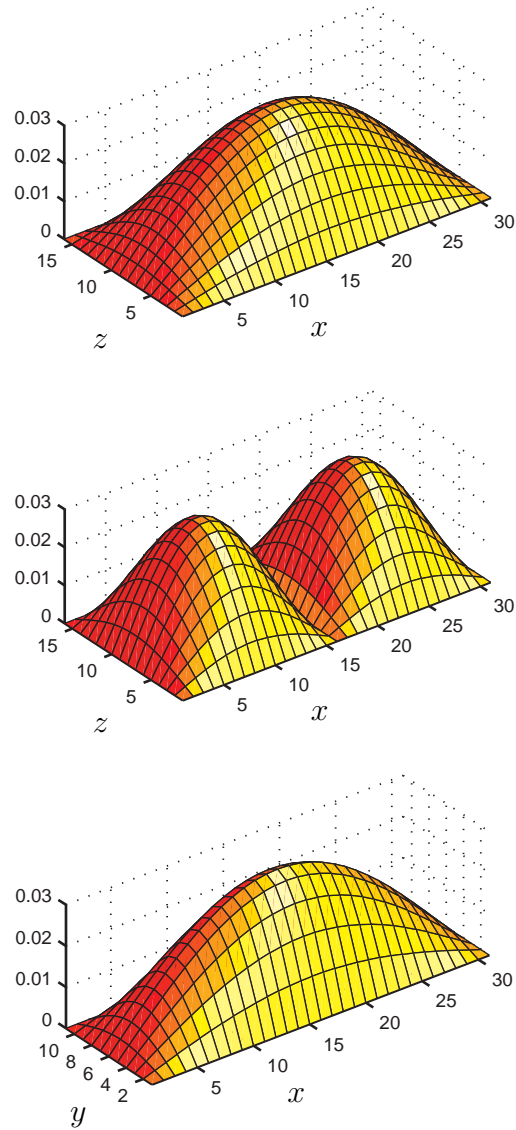
Το ηλεκτρικό πεδίο των ρυθμών TE_{101}^z , TE_{201}^z και TM_{110}^z υπολογίζεται με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (Σχήμα 6.2, σελίδα 104).

Μπορούμε να κάνουμε τις ίδιες παρατηρήσεις με εκείνες του κυματοδηγού. Τα αριθμητικά αποτελέσματα βρίσκονται σε τέλεια συμφωνία με τη θεωρία. Η απόσταση μεταξύ των \mathbf{e}_{num} και \mathbf{e}_{th} είναι τής τάξης του 10^{-14} σε όλες τις περιπτώσεις. Η απόσταση ανάμεσα στον αριθμό 1.0 και στον πλησιέστερο επόμενο αριθμό είναι ίση με $\epsilon = 2.22 \cdot 10^{-16}$ στον υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε για τα αποτελέσματα. Συμπεραίνουμε ότι η απόσταση $\|\mathbf{e}_{\text{th}} - \mathbf{e}_{\text{num}}\|$ είναι πολύ κοντά στο αριθμητικό μηδέν. Αυτό δείχνει ότι το σφάλμα τής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για τους ρυθμούς τής κοιλότητας είναι τής τάξης τής αριθμητικής ακρίβειας του υπολογιστή.

6.2 Ανοιχτά προβλήματα

6.2.1 Μέθοδοι επίλυσης

Στην περίπτωση ανοιχτών προβλημάτων (προβλήματα ακτινοβολίας και σκέδασης), ο δεύτερος όρος τής εξίσωσης (5.14) (σελίδα 78) είναι μη μηδενικός. Πρέπει λοιπόν να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα, συχνά πολύ σημαντικών διαστάσεων. Καθώς το σύστημα είναι αραιής μορφής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικές μεθόδους για την επίλυσή του. Ανάμεσα στο πλήθος των διαθέσιμων μεθόδων (Saad, 1996) επιλέγουμε εδώ τη σταθεροποιημένη μέθοδο δισυζυγών κλίσεων (*Bigradient conjugate stabilized*, BICG-STAB) και τη μέθοδο γενικευμένου ελάχιστου υπολοίπου (*Generalized Minimum Residual*, GMRES). Αυτές οι δύο μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση μη συμμετρικών συστημάτων, όπως αυτό που προκύπτει από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.



Σχήμα 6.2: Συνιστώσα E_y τού ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών TE_{101}^z (πάνω) και TE_{201}^z (κέντρο), και συνιστώσα E_z τού ρυθμού TM_{110}^z (κάτω) για μια ορθογωνική κοιλότητα, με $a/b = 3$ και $a/c = 2$.

Σε σχέση με τις μεθόδους απευθείας αντιστροφής, οι επαναληπτικές μέθοδοι έχουν μειωμένες απαιτήσεις υπολογιστικών πόρων. Όμως, η σύγκλιση των μεθόδων δεν είναι πάντα εγγυημένη. Για να βελτιώσουμε, και ορισμένες φορές να διασφαλίσουμε, τη σύγκλιση, πρέπει να τροποποιήσουμε το γραμμικό σύστημα, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με έναν κατάλληλο πίνακα (*preconditioning*), ώστε να αποκτήσουμε ένα ισοδύναμο σύστημα με ευκολότερη επίλυση (Bruaset, 1995). Στα πλαίσια των εργασιών μας, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του πλήρους διαχωρισμού LU – όταν οι υπολογιστικοί πόροι το επιτρέπουν – ή του μη πλήρους διαχωρισμού LU (*Incomplete Lower Up*, ILU) στην αντίθετη περίπτωση. Για να μειώσουμε τον αριθμό μη μηδενικών στοιχείων στο διαχωρισμό ILU, μεταβάλλουμε τη σειρά των στηλών του πίνακα του συστήματος (*approximate minimum degree column ordering*, COLAMD) (Larimore, 1998).

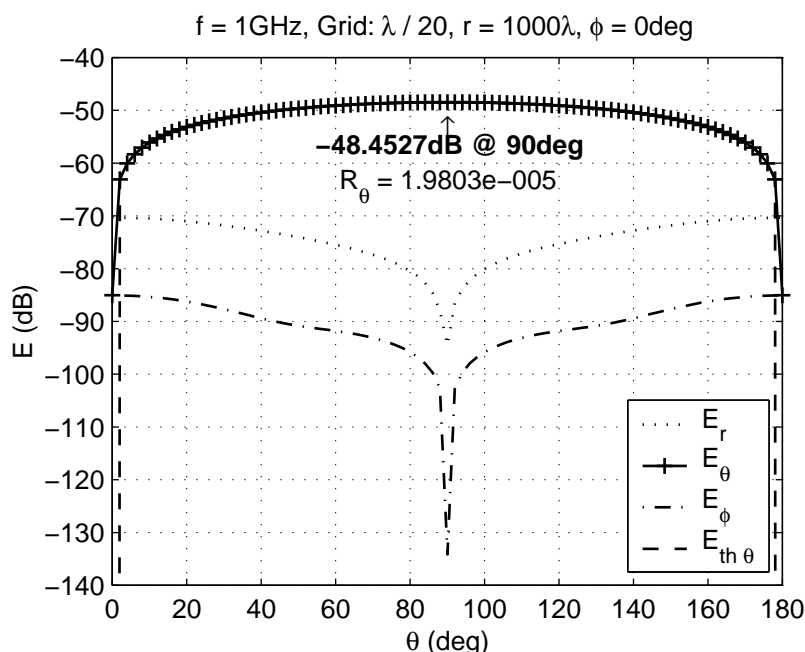
6.2.2 Στοιχειώδεις δίπολο

Μελετάμε την ακτινοβολία ενός στοιχειώδους διπόλου. Το δίπολο μοντελοποιείται με την παρουσία μιας πηγής ρεύματος, εφαρμοσμένης σε μία μόνο ακμή του πλέγματος. Επιλέγουμε την πόλωση $\mathbf{J}(z) = \hat{\mathbf{z}}$ και τη συχνότητα $f = 1 \text{ GHz}$. Χρησιμοποιούμε τρισδιάστατο πλέγμα, με διαστάσεις $\lambda/20$, με 31 κυψέλες σε κάθε άξονα. Το δίπολο βρίσκεται στο κέντρο του υπολογιστικού χώρου. Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο BICG-STAB και ένα απλό *preconditioning* με τη διαγώνιο του πίνακα.

Τα αποτελέσματα στο μακρινό πεδίο (Σχήμα 6.3, σελίδα 106) είναι σε συμφωνία με τη θεωρία (εξισώσεις (5.41), σελίδα 90): οι συνιστώσες E_r και E_ϕ – μηδενικές θεωρητικά – είναι περισσότερο από 20 dB και 40 dB, αντίστοιχα, πιο χαμηλές από τη συνιστώσα E_θ , η οποία ακολουθεί με μεγάλη ακρίβεια ημιτονοειδή μεταβολή κατά τη μεταβλητή θ . Με βάση την τιμή της E_θ στο σημείο $\theta = 90^\circ$, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το ισοδύναμο μήκος του διπόλου είναι $l = 6.82 \mu\text{m} = \lambda/44000$. Αυτή η τιμή επιβεβαιώνει ότι πρόκειται για στοιχειώδες δίπολο, και αντιστοιχεί στο γεγονός ότι το ρεύμα που μοντελοποιεί το δίπολο εφαρμόζεται σε ένα μόνο σημείο του υπολογιστικού χώρου.

6.3 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δείξαμε αρχικά ότι για κλειστά προβλήματα – κυματοδηγούς και κοιλότητες μεταλλικών τοιχωμάτων – οι αριθμητικά υπολογισμένοι ρυθμοί συμπίπτουν πλήρως με εκείνους που προβλέπει η θεωρία. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την εγκυρότητα



Σχήμα 6.3: Ακτινοβολία στοιχειώδους διπόλου στο μακρινό πεδίο: σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού και αριθμητικού πεδίου πεπερασμένων διαφορών.

τής μεθόδου που αναπτύξαμε. Συγκεκριμένα, σε αυτούς τους υπολογισμούς εμπλέκεται μόνο ο βασικός πυρήνας της μεθόδου, η διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell. Τα υπόλοιπα τμήματα, όπως τα απορροφητικά τοιχώματα, οι μέθοδοι *preconditioning* και επίλυσης του γραμμικού συστήματος, δεν έχουν καμία επίδραση. Στη συνέχεια, υπολογίσαμε την ακτινοβολία μακρινού πεδίου από ένα στοιχειώδες δίπολο, και διαπιστώσαμε ότι τα αποτελέσματα βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τη θεωρία.

Σχετικά με το χρόνο υπολογισμού, το δισδιάστατο πρόβλημα του κυματοδηγού λύθηκε σε 15 sec (χρησιμοποιήθηκαν 35 MB μνήμης), εκείνο της κοιλότητας σε 2 min (200 MB), και το τρισδιάστατο πρόβλημα του διπόλου σε 38 min (200 MB). Ο υπολογιστής που χρησιμοποιήθηκε είναι, όπως στο κεφάλαιο 3, ένας σταθμός εργασίας Hewlett-Packard Visualize B2000, με επεξεργαστή RISC PA-8500 400 MHz και 1 GB φυσικής μνήμης.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Νῦν ἡ ταπείνωση τῶν Θεῶν Νῦν ἡ σποδὸς τοῦ Ἀνθρώπου
Νῦν Νῦν τὸ μηδέν

Ο βασικός στόχος αυτής τῆς εργασίας ἦταν ἡ μελέτη τῆς δυνατότητας ανάπτυξης μίας μεθόδου τρισδιάστατης ποσοτικής μικροκυματικής απεικόνισης για αντικείμενα στο εσωτερικό δομών. Ἡ μελέτη χωρίζεται σε δύο φάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα δύο μέρη αυτής τῆς διατριβῆς.

Σε ένα πρώτο στάδιο, βελτιώσαμε μίᾱ δισδιάστατη μέθοδο μικροκυματικής απεικόνισης. Ἡ τροποποιημένη μέθοδος λαμβάνει υπόψη τὴ μορφή τοῦ προσπίπτοντος κύματος, στο κοντινὸ πεδίο των κεραιῶν εκπομπῆς, και περιέχει ἐπίσης ἓνα αριθμητικὸ μοντέλο για τὸ θόρυβο μέτρησης. Αυτὴ ἡ μέθοδος αποτελεί τὸ σημείο εκκίνησης για τὴν επέκταση στὴν τρισδιάστατη περίπτωση. Ἦταν λοιπὸν αναγκαίον να εξετάσουμε τις ιδιότητες ανακατασκευῆς πολυάριθμων προβλημάτων.

Μελετήσαμε τὴν επίδραση μίας σειράς παραμέτρων – ὅπως ἡ σύνθεση τῆς γραμμῆς μέτρησης, ἡ ζώνη συχνότητων, ἡ στάθμη τοῦ προστιθέμενου θορύβου – με σκοπὸ να βγάλουμε γενικά συμπεράσματα σχετικά με τὴ συμπεριφορά τῆς μεθόδου και να εἴμαστε σε θέση να ἐπιλέγουμε τις βέλτιστες τιμές για τὰ διάφορα μεγέθη.

Τὰ αποτελέσματα ἐπαλήθευσαν τὴν καλὴ λειτουργία τῆς μεθόδου σε ἓνα μεγάλο ἀριθμὸ καταστάσεων. Ἡ μέθοδος ἀποδείχτηκε ἀνθεκτικὴ στο θόρυβο, ἰδιαίτερα σε ὅ,τι ἀφορὰ τὴν ἀνακατασκευὴ τῆς ηλεκτρικῆς ἐπιδεκτικότητας. Ἡ ἀνακατασκευὴ τῆς ἀγωγιμότητας παραμένει σε ὅλες τις περιπτώσεις, με ἢ χωρὶς θόρυβο, πῶ δύσκολη. Αὐτὸ τὸ συμπέρασμα βρίσκεται σε συμφωνία με τις διαπιστώσεις τοῦ Dourthe (1997).

Σε συνθήκες ἀπουσίας θορύβου, μπορέσαμε να δείξουμε τὴν ὑπαρξὴ μίας βέλτιστης ποσότητας πληροφορίας, ἡ ὁποία πρέπει να δοθεῖ στὸν ἀλγόριθμο

ανακατασκευής. Για την περίπτωση δεδομένων με θόρυβο, όπου η πληροφορία που μεταφέρεται από τα δεδομένα δεν είναι ακριβής, δεν μπορέσαμε να επαναλάβουμε αυτό το αποτέλεσμα: έχουμε διαρκώς καλύτερες ανακατασκευές όσο αυξάνουμε την ποσότητα των διαθέσιμων δεδομένων, αν και, στις πιο πολλές περιπτώσεις, η βελτίωση των αποτελεσμάτων δε δικαιολογεί τον επιπλέον χρόνο υπολογισμού.

Δείξαμε ότι ο πολυσυχνотικός χαρακτήρας της μεθόδου, εμπεριέχει τα πλεονεκτήματα μιας τεχνικής μεταλλαγής συχνοτήτων. Επιπλέον, διαπιστώσαμε ότι η μέθοδος είναι σχεδόν ανεπηρέαστη από την επιλογή της αρχικής εκτίμησης: χωρίς κανονικοποίηση, έχουμε παρόμοια αποτελέσματα είτε ξεκινήσουμε με μια μηδενική αρχική εκτίμηση είτε με μια εκτίμηση σχετικά κοντά στο ζητούμενο αντικείμενο.¹ Πρόκειται για ένα θετικό σημείο της μεθόδου, το οποίο επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα του Lobel (1996).

Σχετικά με τις συχνότητες που χρησιμοποιούνται για την ανακατασκευή, δείξαμε την ανάγκη για μια μεγάλη περιοχή συχνοτήτων: οι χαμηλές συχνότητες διεισδύουν στο αγωγίμο μέσο, προσδιορίζουν τη θέση του αντικειμένου και συνεισφέρουν στην ανακατασκευή της αγωγιμότητας· οι υψηλές συχνότητες δίνουν την απαραίτητη ανάλυση στα ανακατασκευασμένα προφίλ.

Αν και η ζώνη συχνοτήτων πρέπει να έχει μεγάλο εύρος, δείξαμε ότι ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων δεν πρέπει να είναι απαραίτητα μεγάλος. Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα σε σχέση με την επιλογή της μεθόδου επίλυσης του ευθέως προβλήματος στην περίπτωση της τρισδιάστατης απεικόνισης, γιατί μας επιτρέπει να παραμείνουμε στο πεδίο των συχνοτήτων.

Σε ό,τι αφορά την τρισδιάστατη μέθοδο απεικόνισης, επιλέξαμε να λύσουμε το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων. Αναπτύξαμε λοιπόν, σε ένα δεύτερο στάδιο, μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, κατάλληλη για ενσωμάτωση σε μια μέθοδο μικροκυματικής απεικόνισης, όπως εκείνη που μελετήθηκε στο πρώτο μέρος της διατριβής. Αν και η μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων, αναπτύξαμε επίσης τη δισδιάστατη εκδοχή της, για τις δύο πολώσεις του πεδίου (εγκάρσιο μαγνητικό και εγκάρσιο ηλεκτρικό).

Επιλέξαμε ένα κλασικό πλέγμα, με κυψέλες κυβικές – στην τρισδιάστατη περίπτωση – ή τετραγωνικές – στη δισδιάστατη περίπτωση. Με βάση την εφαρμογή την οποία έχουμε υπόψη, ένα πιο εξελιγμένο πλέγμα δε θα ήταν χρήσιμο στην παρούσα φάση της μελέτης: τα πολύπλοκα πλέγματα εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες των σχεδαστών για να δώσουν καλύτερα αποτελέσματα, όμως στο αντίστροφο πρόβλημα οι σχεδαστές είναι άγνωστοι.

¹ Προφανώς, όταν η αρχική εκτίμηση είναι πολύ κοντά στο πραγματικό αντικείμενο, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση.

Ακολουθήσαμε μια μαθηματική περιγραφή «σκεδαζόμενου πεδίου» (*pure scattered field*) για να περιγράψουμε το πρόβλημα της σκέδασης. Όμως, αναδεικνύοντας τη συμμετρία των εξισώσεων του Maxwell για το ολικό και το σκεδαζόμενο πεδίο, αναπτύξαμε μια μέθοδο η οποία μπορεί να χειριστεί τόσο τα προβλήματα ανοιχτής γεωμετρίας, όσο και εκείνα της ακτινοβολίας και σκέδασης. Η μέθοδος συμπληρώνεται από ένα μετασχηματισμό κοντινού σε μακρινό πεδίο, βασισμένο στο ολοκλήρωμα Kirchhoff. Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να φανεί χρήσιμος στην περίπτωση απεικόνισης μακρινού πεδίου.

Παρουσιάσαμε ορισμένα αποτελέσματα για την πιστοποίηση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Σημειώνουμε ότι για την υλοποίηση της μεθόδου, αναπτύξαμε τον κώδικα FDFD-GREC (*Finite-Difference Frequency-Domain General-purpose Rectangular-mesh Electromagnetic Code*). Ο κώδικας, αποτελούμενος από είκοσι χιλιάδες γραμμές σε γλώσσα MATLAB, είναι προσανατολισμένος για χρήση σε μέθοδο απεικόνισης· παραμένει όμως αυτόνομος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γενικών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, όπως προκύπτει και από το όνομά του.

Οι προοπτικές αυτής της διατριβής σχετίζονται με τα βασικά αντικείμενα που μελετήθηκαν σε κάθε μέρος της. Σχετικά με το πρώτο μέρος, μπορούμε να εργαστούμε προς την κατεύθυνση των ανακατασκευών με βάση πραγματικά δεδομένα. Η καλή συμπεριφορά της μεθόδου ανακατασκευής απέναντι στο θόρυβο δείχνει ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Το πρόβλημα που τίθεται είναι ουσιαστικά εκείνο της προσαρμογής (*calibration*) των μετρήσεων. Ένα μετρητικό σύστημα, το οποίο αναπτύχθηκε στα πλαίσια των εργασιών του Guillaumont (2000), είναι διαθέσιμο στο γαλλικό εργαστήριο.

Σε ένα πιο θεωρητικό πλαίσιο, θα ήταν ενδιαφέρον να ποσοτικοποιήσουμε την έννοια της απαραίτητης πληροφορίας, η οποία αναπτύχθηκε κατά τη συζήτηση των αποτελεσμάτων του τρίτου κεφαλαίου. Φαίνεται λογικό, ως σημείο εκκίνησης, να χρησιμοποιηθούν έννοιες από τη θεωρία πληροφορίας και τη θεωρία πιθανοτήτων (Bucci et al., 2001, Dosso and Wilmut, 2002).

Η προφανής προοπτική του δεύτερου μέρους της διατριβής, είναι η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που αναπτύξαμε φαίνεται να είναι κατάλληλη γι' αυτό το σκοπό, καθώς η μαθηματική της περιγραφή περιλαμβάνει εκπεφρασμένα τις ηλεκτρομαγνητικές παραμέτρους του υπολογιστικού χώρου. Με βάση αυτή την περιγραφή, μπορούμε να ορίσουμε ένα συναρτησιοειδές και να υπολογίσουμε τις συναρτησιακές παραγώγους κατά Fréchet. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος που αναπτύξαμε περιλαμβάνει τόσο τη δισδιάστατη περίπτωση, με δύο πολώσεις, όσο και την τρισδιάστατη. Η ενσωμάτωσή της σε μια μέθοδο απεικόνισης θα δώσει ένα σύνολο τριών μεθόδων, ικανών να λύσουν διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων.

Κλείνοντας το κεφάλαιο των συμπερασμάτων, αναφερόμαστε σε ορισμένους τεχνικούς περιορισμούς της μεθόδου που αναπτύχθηκε. Ο προγραμματισμός σε περιβάλλον MATLAB (γλώσσα τέταρτης γενιάς), μας προσέφερε ένα σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με το χρόνο ανάπτυξης του κώδικα, ειδικά γι' αυτή τη μέθοδο που χρησιμοποιεί πίνακες αραιής μορφής. Σε ό,τι αφορά το χρόνο υπολογισμού, χρειάστηκε να προσαρμόσουμε προσεκτικά τον κώδικά μας στην αρχιτεκτονική υλοποίησης των πινάκων αραιής μορφής στο MATLAB (Gilbert et al., 1992) ώστε να πετύχουμε θεαματικές βελτιώσεις.² Θεωρούμε ότι στην παρούσα κατάσταση, ο χρόνος υπολογισμού δεν αποτελεί πρόβλημα.

Αντίθετα, οι δυσκολίες προέρχονται από τις απαιτήσεις σε μνήμη. Καθώς το MATLAB δεν υπάρχει σε παράλληλη έκδοση, είμαστε περιορισμένοι από τις προδιαγραφές του λειτουργικού συστήματος. Για τις αρχιτεκτονικές 32 bits, αυτό το όριο κυμαίνεται ανάμεσα σε 1 και 2 GB, ανάλογα με το σύστημα. Για τα τρισδιάστατα προβλήματα, όμως, η απαιτούμενη μνήμη είναι συχνά μεγαλύτερη από αυτό το όριο. Αυτός ο περιορισμός θα αρθεί τη στιγμή που θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το MATLAB σε αρχιτεκτονική 64 bits.

Μια εναλλακτική λύση θα ήταν να γραφεί ο κώδικας από την αρχή, σε μία γλώσσα τρίτης γενιάς (π.χ. C, C++ ή Fortran) και να χρησιμοποιηθούν τεχνικές παράλληλου υπολογισμού. Όμως, με δεδομένο το μέγεθος του κώδικα, αυτή η λύση φαίνεται αρκετά δαπανηρή στην εφαρμογή της.

²Για παράδειγμα, ο χρόνος κατασκευής του πίνακα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών, για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, μεταβλήθηκε από περισσότερο από δύο ώρες σε δύο μόνο λεπτά, μετά από μια βελτιστοποίηση του κώδικα.

καὶ Αἰέν ὁ κόσμος ὁ μικρός, ὁ Μέγας!

Ὅδυσσέας Ἑλύτης
«Τό Ἄξιον ἔστί»

Μέρος ΙΙΙ

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Τελεστής ανάδελτα σε πίνακες

Α΄.1 Κλίση πίνακα

Έστω \mathbf{A} ένας πραγματικός πίνακας, διαστάσεων $N_l \times N_c$. Ορίζουμε τον πίνακα $N_l \times N_c$ τής κλίσης τού \mathbf{A} κατά τη διεύθυνση των στηλών του ως:

$$(\nabla_c \mathbf{A})_{i,j} \triangleq \begin{cases} \mathbf{A}_{i,j+1} - \mathbf{A}_{i,j} & j = 1, \dots, N_c - 1 \\ 0 & j = N_c \end{cases} \quad (\text{A'}.1)$$

και τον πίνακα $N_l \times N_c$ τής κλίσης τού \mathbf{A} κατά τη διεύθυνση των γραμμών του ως:

$$(\nabla_l \mathbf{A})_{i,j} \triangleq \begin{cases} \mathbf{A}_{i+1,j} - \mathbf{A}_{i,j} & i = 1, \dots, N_l - 1 \\ 0 & i = N_l \end{cases}. \quad (\text{A'}.2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν τις δύο συνιστώσες τής κλίσης τού πίνακα \mathbf{A} στο σημείο (i, j) . Το μέτρο τής κλίσης ορίζεται ως:

$$\|(\nabla \mathbf{A})_{i,j}\| \triangleq [(\nabla_c \mathbf{A})_{i,j}^2 + (\nabla_l \mathbf{A})_{i,j}^2]^{1/2}. \quad (\text{A'}.3)$$

Α΄.2 Λαπλασιανή πίνακα

Έστω \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} τρεις πραγματικοί πίνακες διαστάσεων $N_l \times N_c$. Η λαπλασιανή τού πίνακα \mathbf{A} με βάρος \mathbf{B} ορίζεται ως:

$$\langle -\nabla_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle \triangleq \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{B}_{i,j} (\nabla \mathbf{A})_{i,j} \cdot (\nabla \mathbf{C})_{i,j}. \quad (\text{A'}.4)$$

Αναπτύσσοντας το διακριτό εσωτερικό γινόμενο στο αριστερό μέλος και το εσωτερικό γινόμενο των κλίσεων στο δεξί, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{A} = & -(\mathbf{B}_{i,j-1} + 2\mathbf{B}_{i,j} + \mathbf{B}_{i-1,j})\mathbf{A}_{i,j} + \\ & \mathbf{B}_{i,j-1}\mathbf{A}_{i,j-1} + \mathbf{B}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j+1} + \\ & \mathbf{B}_{i-1,j}\mathbf{A}_{i-1,j} + \mathbf{B}_{i,j}\mathbf{A}_{i+1,j}. \quad (\text{A'.5}) \end{aligned}$$

Παράρτημα Β΄

Διακριτοποίηση διαφορικών τελεστών

Θα αποδείξουμε τις εκφράσεις που δίνουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης σε προσέγγιση τάξης¹ h^2 . Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις τιμές τής συνάρτησης πάνω σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R}^n και πεδίο τιμών το \mathbb{R} . Συμβολίζουμε με $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ το διάνυσμα των n μεταβλητών τής συνάρτησης και με \mathbf{e}_i το μοναδιαίο διάνυσμα του οποίου η i -οστή συνιστώσα ισούται με ένα και οι υπόλοιπες με μηδέν. Το ανάπτυγμα Taylor τής f γύρω από το σημείο \mathbf{x}_0 κατά τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{e}_i γράφεται:

$$f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}_0) + h \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{\mathbf{x}_0} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right|_{\mathbf{x}_0} + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{B'.1}\alpha')$$

$$f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}_0) - h \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{\mathbf{x}_0} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right|_{\mathbf{x}_0} + \mathcal{O}(h^4). \quad (\text{B'.1}\beta')$$

Αν αφαιρέσουμε την (B'.1β') από την (B'.1α') κατά μέλη έχουμε:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{e}_i)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{B'.2}\alpha')$$

¹Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση $f(a)$ είναι τάξης a και συμβολίζουμε $f(a) = \mathcal{O}(a)$, αν

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)}{a} = A \quad 0 < |A| < \infty.$$

ενώ αν τις προσθέσουμε:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - 2f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{e}_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{B'.2}\beta')$$

Παράρτημα Γ'

Διακριτοποίηση εξισώσεων Maxwell

Για τη διακριτοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων χρησιμοποιούμε το ομοιόμορφο ορθογωνικό πλέγμα τής παραγράφου 5.1 με μήκος πλευράς h .

Σ' αυτό το παράρτημα χρειάζεται συχνά να γράψουμε ρητώς σε ποιο σημείο τού χώρου υπολογίζονται τα μαθηματικά μεγέθη. Συμβολίζουμε με $f|_{\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, \frac{z}{h}}$ την τιμή τής ποσότητας f στο σημείο (x, y, z) . Μ' αυτό το συμβολισμό και με βάση τον πίνακα 5.1 (σελίδα 72) μπορούμε, για παράδειγμα, να γράψουμε:

$$\begin{aligned} E_x^{i,j,k} &= E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k} & E_y^{i,j,k} &= E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k} & E_z^{i,j,k} &= E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\ H_x^{i,j,k} &= H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} & H_y^{i,j,k} &= H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} & H_z^{i,j,k} &= H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}. \end{aligned}$$

Γ'.1 Εξίσωση Faraday

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (4.1γ'):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{M}. \quad (\Gamma'.1)$$

Αναλύουμε την παραπάνω διανυσματική εξίσωση στις τρεις συνιστώσες της και τις υπολογίζουμε στα σημεία όπου ορίζεται το μαγνητικό πεδίο στην κυψέλη

(i, j, k) :

$$-j\omega(\dot{\mu}_{xx}H_x)|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - M_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\partial E_z}{\partial y}\Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (\Gamma'.2\alpha')$$

$$-j\omega(\dot{\mu}_{yy}H_y)|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - M_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \quad (\Gamma'.2\beta')$$

$$-j\omega(\dot{\mu}_{zz}H_z)|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - M_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \quad (\Gamma'.2\gamma')$$

Προσεγγίζουμε τις χωρικές παραγώγους πρώτης τάξης με πεπερασμένες διαφορές, σύμφωνα με την εξίσωση (B'.2α')¹:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}\Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \approx \frac{E_z|_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{h} = \frac{E_z^{i,j+1,k} - E_z^{i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.3\alpha')$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \approx \frac{E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}}{h} = \frac{E_y^{i,j,k+1} - E_y^{i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.3\beta')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}}{h} = \frac{E_x^{i,j,k+1} - E_x^{i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.3\gamma')$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}\Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{h} = \frac{E_z^{i+1,j,k} - E_z^{i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.3\delta')$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \approx \frac{E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}}{h} = \frac{E_y^{i+1,j,k} - E_y^{i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.3\epsilon')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \approx \frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}}{h} = \frac{E_x^{i,j+1,k} - E_x^{i,j,k}}{h}. \quad (\Gamma'.3\zeta')$$

Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις (Γ'.2) αντικαθιστώντας τις παραγώγους στο δεξί μέλος από τις (Γ'.3) και τα μεγέθη στο αριστερό από τις (5.1). Προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις που δίνουν το μαγνητικό πεδίο στην κυψέλη (i, j, k) συναρτήσει του μαγνητικού ρεύματος στην κυψέλη και του ηλεκτρικού πεδίου

¹ Η διάσταση του πλέγματος που χρησιμοποιείται εδώ είναι η μισή εκείνης του παραρτήματος Β'.

στην ίδια και σε τρεις γειτονικές κυψέλες:

$$H_x^{i,j,k} = \frac{E_y^{i,j,k+1} - E_y^{i,j,k} - E_z^{i,j+1,k} + E_z^{i,j,k} - hM_x^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} \quad (\Gamma'.4\alpha')$$

$$H_y^{i,j,k} = \frac{E_z^{i+1,j,k} - E_z^{i,j,k} - E_x^{i,j,k+1} + E_x^{i,j,k} - hM_y^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} \quad (\Gamma'.4\beta')$$

$$H_z^{i,j,k} = \frac{E_x^{i,j+1,k} - E_x^{i,j,k} - E_y^{i+1,j,k} + E_y^{i,j,k} - hM_z^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle}. \quad (\Gamma'.4\gamma')$$

Δισδιάστατα προβλήματα

Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω εκφράσεις.

Πόλωση TM:

$$H_x^{i,j} = \frac{-E_z^{i,j+1} + E_z^{i,j} - hM_x^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j} \rangle} \quad (\Gamma'.5\alpha')$$

$$H_y^{i,j} = \frac{E_z^{i+1,j} - E_z^{i,j} - hM_y^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j} \rangle}. \quad (\Gamma'.5\beta')$$

Πόλωση TE:

$$H_z^{i,j} = \frac{E_x^{i,j+1} - E_x^{i,j} - E_y^{i+1,j} + E_y^{i,j} - hM_z^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle}. \quad (\Gamma'.6)$$

Γ'.2 Εξίσωση Maxwell-Ampère

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (4.1δ'):

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (\Gamma'.7)$$

Αναλύουμε τη διανυσματική εξίσωση στις τρεις συνιστώσες της και τις υπολογίζουμε στα σημεία όπου ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στην κυψέλη (i, j, k) :

$$j\omega(\dot{\epsilon}_{xx}E_x)|_{i+\frac{1}{2},j,k} + J_x|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\partial H_z}{\partial y}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (\Gamma'.8\alpha')$$

$$j\omega(\dot{\epsilon}_{yy}E_y)|_{i,j+\frac{1}{2},k} + J_y|_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\partial H_x}{\partial z}\bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (\Gamma'.8\beta')$$

$$j\omega(\dot{\epsilon}_{zz}E_z)|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + J_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\partial H_y}{\partial x}\bigg|_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\bigg|_{i,j,k+\frac{1}{2}}. \quad (\Gamma'.8\gamma')$$

Προσεγγίζουμε τις χωρικές παραγώγους πρώτης τάξης με πεπερασμένες διαφορές, σύμφωνα με την εξίσωση (B'.2α'):

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k} \approx \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{h} = \frac{H_z^{i,j,k} - H_z^{i,j-1,k}}{h} \quad (\Gamma'.9\alpha')$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k} \approx \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{H_y^{i,j,k} - H_y^{i,j,k-1}}{h} \quad (\Gamma'.9\beta')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}\bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k} \approx \frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j,k-1}}{h} \quad (\Gamma'.9\gamma')$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}\bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k} \approx \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{h} = \frac{H_z^{i,j,k} - H_z^{i-1,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.9\delta')$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}\bigg|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{h} = \frac{H_y^{i,j,k} - H_y^{i-1,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.9\epsilon')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}\bigg|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h} = \frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j-1,k}}{h}. \quad (\Gamma'.9\zeta')$$

Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις (Γ'.8) αντικαθιστώντας τις παραγώγους στο δεξί μέλος από τις (Γ'.9) και τα μεγέθη στο αριστερό από τις (5.1). Προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις που δίνουν το ηλεκτρικό πεδίο στην κυψέλη (i,j,k) συναρτήσει τού ηλεκτρικού ρεύματος στην κυψέλη και τού μαγνητικού πεδίου στην ίδια και σε τρεις γειτονικές κυψέλες:

$$E_x^{i,j,k} = \frac{H_z^{i,j,k} - H_z^{i,j-1,k} - H_y^{i,j,k} + H_y^{i,j,k-1} - hJ_x^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\epsilon}_{xx}^{i,j,k} \rangle} \quad (\Gamma'.10\alpha')$$

$$E_y^{i,j,k} = \frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j,k-1} - H_z^{i,j,k} + H_z^{i-1,j,k} - hJ_y^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\epsilon}_{yy}^{i,j,k} \rangle} \quad (\Gamma'.10\beta')$$

$$E_z^{i,j,k} = \frac{H_y^{i,j,k} - H_y^{i-1,j,k} - H_x^{i,j,k} + H_x^{i,j-1,k} - hJ_z^{i,j,k}}{h j \omega \langle \dot{\varepsilon}_{zz}^{i,j,k} \rangle}. \quad (\Gamma'.10\gamma')$$

Δισδιάστατα προβλήματα

Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω εκφράσεις.

Πόλωση TM:

$$E_z^{i,j} = \frac{H_y^{i,j} - H_y^{i-1,j} - H_x^{i,j} + H_x^{i,j-1} - hJ_z^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\varepsilon}_{zz}^{i,j} \rangle}. \quad (\Gamma'.11)$$

Πόλωση TE:

$$E_x^{i,j} = \frac{H_z^{i,j} - H_z^{i,j-1} - hJ_x^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\varepsilon}_{xx}^{i,j} \rangle} \quad (\Gamma'.12\alpha')$$

$$E_y^{i,j} = \frac{-H_z^{i,j} + H_z^{i-1,j} - hJ_y^{i,j}}{h j \omega \langle \dot{\varepsilon}_{yy}^{i,j} \rangle}. \quad (\Gamma'.12\beta')$$

Γ'.3 Κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο

Τρισδιάστατα προβλήματα

Αντικαθιστούμε το μαγνητικό πεδίο στις εξισώσεις (Γ'.10) από τις (Γ'.4). Προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις, για τις τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην κυψέλη (i, j, k) :

$$\begin{aligned} & -\frac{E_x^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{E_z^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k-1} \rangle} - \frac{E_z^{i+1,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k-1} \rangle} - \frac{E_x^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1,k} \rangle} + \frac{E_y^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1,k} \rangle} - \frac{E_y^{i+1,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1,k} \rangle} \\ & + \left(\frac{1}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1,k} \rangle} - h^2 \omega^2 \langle \dot{\varepsilon}_{xx}^{i,j,k} \rangle \right) E_x^{i,j,k} \\ & - \frac{E_y^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_z^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} + \frac{E_y^{i+1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} + \frac{E_z^{i+1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_x^{i,j+1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_x^{i,j,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -h^2 \mathbf{j} \omega J_x^{i,j,k} - h \left(\frac{M_y^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k-1} \rangle} - \frac{M_z^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1,k} \rangle} - \frac{M_y^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} + \frac{M_z^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} \right) \\
 &\quad (\Gamma'.13\alpha') \\
 &- \frac{E_y^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{E_z^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k-1} \rangle} - \frac{E_z^{i,j+1,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{E_x^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j,k} \rangle} - \frac{E_y^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j,k} \rangle} - \frac{E_x^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} \\
 &+ \left(\frac{1}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j,k} \rangle} - h^2 \omega^2 \langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k} \rangle \right) E_y^{i,j,k} \\
 &- \frac{E_z^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_y^{i+1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_x^{i-1,j+1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} + \frac{E_x^{i,j+1,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} + \frac{E_z^{i,j+1,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_y^{i,j,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} \\
 &= -h^2 \mathbf{j} \omega J_y^{i,j,k} - h \left(-\frac{M_x^{i,j,k-1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k-1} \rangle} + \frac{M_z^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j,k} \rangle} + \frac{M_x^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} - \frac{M_z^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j,k} \rangle} \right) \\
 &\quad (\Gamma'.13\beta') \\
 &\frac{E_y^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1,k} \rangle} - \frac{E_z^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1,k} \rangle} + \frac{E_x^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j,k} \rangle} - \frac{E_z^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j,k} \rangle} - \frac{E_x^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_y^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} \\
 &+ \left(\frac{1}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j,k} \rangle} - h^2 \omega^2 \langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k} \rangle \right) E_z^{i,j,k} \\
 &- \frac{E_z^{i+1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_z^{i,j+1,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} - \frac{E_y^{i,j-1,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1,k} \rangle} - \frac{E_x^{i-1,j,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j,k} \rangle} + \frac{E_x^{i,j,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} + \frac{E_y^{i,j,k+1}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} \\
 &= -h^2 \mathbf{j} \omega J_z^{i,j,k} - h \left(\frac{M_x^{i,j-1,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1,k} \rangle} - \frac{M_y^{i-1,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j,k} \rangle} - \frac{M_x^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j,k} \rangle} + \frac{M_y^{i,j,k}}{\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j,k} \rangle} \right). \\
 &\quad (\Gamma'.13\gamma')
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν μόνο το ηλεκτρικό πεδίο. Καθώς έχουν προκύψει από συνδυασμό των εξισώσεων Faraday και Maxwell-Ampère, μπορούμε να θεωρούμε ότι πρόκειται για μια διακριτοποιημένη μορφή της κυματικής εξίσωσης του ηλεκτρικού πεδίου.

Σε προβλήματα σκέδασης, τα \mathbf{J} , \mathbf{M} μπορεί να περιέχουν και επαγόμενα ρεύματα, όπως αυτά ορίζονται από τις εξισώσεις (4.12), σελίδα 68. Η διακριτοποιημένη μορφή των ηλεκτρικών επαγόμενων ρευμάτων είναι:

$$J_x^{(ind)i,j,k} = \mathbf{j} \omega \langle \dot{c}_{(e)xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{(i)i,j,k} \quad (\Gamma'.14\alpha')$$

$$J_y^{(ind)i,j,k} = j\omega \left\langle \dot{\epsilon}_{(e)yy}^{i,j,k} \right\rangle E_y^{(i)i,j,k} \quad (\Gamma'.14\beta')$$

$$J_z^{(ind)i,j,k} = j\omega \left\langle \dot{\epsilon}_{(e)zz}^{i,j,k} \right\rangle E_z^{(i)i,j,k} \quad (\Gamma'.14\gamma')$$

ενώ με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε και τα διακριτοποιημένα μαγνητικά επαγόμενα ρεύματα.

Δισδιάστατα προβλήματα

Πόλωση TM: Αντικαθιστούμε το μαγνητικό πεδίο στις εξισώσεις (Γ'.11) από τις (Γ'.5). Προκύπτει η παρακάτω εξίσωση, για τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην κυψέλη (i, j) :

$$\begin{aligned} & -\frac{E_z^{i,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1} \right\rangle} - \frac{E_z^{i-1,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j} \right\rangle} \\ & + \left(\frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j} \right\rangle} + \frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1} \right\rangle} + \frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j} \right\rangle} + \frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j} \right\rangle} - h^2\omega^2 \left\langle \dot{\epsilon}_{zz}^{i,j} \right\rangle \right) E_z^{i,j} \\ & - \frac{E_z^{i+1,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j} \right\rangle} - \frac{E_z^{i,j+1}}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j} \right\rangle} \\ & = -h^2 j\omega J_z^{i,j} - h \left(\frac{M_x^{i,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j-1} \right\rangle} - \frac{M_y^{i-1,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i-1,j} \right\rangle} - \frac{M_x^{i,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{xx}^{i,j} \right\rangle} + \frac{M_y^{i,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{yy}^{i,j} \right\rangle} \right). \quad (\Gamma'.15\alpha') \end{aligned}$$

Πόλωση TE: Αντικαθιστούμε το μαγνητικό πεδίο στις εξισώσεις (Γ'.12) από τις (Γ'.6). Προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις, για τις δύο συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην κυψέλη (i, j) :

$$\begin{aligned} & -\frac{E_x^{i,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1} \right\rangle} + \frac{E_y^{i,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1} \right\rangle} - \frac{E_y^{i+1,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1} \right\rangle} \\ & + \left(\frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \right\rangle} + \frac{1}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1} \right\rangle} - h^2\omega^2 \left\langle \dot{\epsilon}_{xx}^{i,j} \right\rangle \right) E_x^{i,j} \\ & - \frac{E_y^{i,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \right\rangle} + \frac{E_y^{i+1,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \right\rangle} - \frac{E_x^{i,j+1}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \right\rangle} \\ & = -h^2 j\omega J_x^{i,j} - h \left(-\frac{M_z^{i,j-1}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j-1} \right\rangle} + \frac{M_z^{i,j}}{\left\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \right\rangle} \right) \quad (\Gamma'.16\alpha') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E_x^{i-1,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j} \rangle} - \frac{E_y^{i-1,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j} \rangle} - \frac{E_x^{i,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle} \\
 & + \left(\frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle} + \frac{1}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j} \rangle} - h^2 \omega^2 \langle \dot{\epsilon}_{yy}^{i,j} \rangle \right) E_y^{i,j} \\
 & - \frac{E_y^{i+1,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle} - \frac{E_x^{i-1,j+1}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j} \rangle} + \frac{E_x^{i,j+1}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle} \\
 & = -h^2 j \omega J_y^{i,j} - h \left(\frac{M_z^{i-1,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i-1,j} \rangle} - \frac{M_z^{i,j}}{\langle \dot{\mu}_{zz}^{i,j} \rangle} \right). \quad (\Gamma'.16\beta')
 \end{aligned}$$

Γ'.4 Εξίσωση Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (4.1α') θεωρώντας και επαγόμενες πηγές ηλεκτρικού φορτίου:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}) = \rho + \rho^{(ind)} \quad (\Gamma'.17)$$

όπου οι πηγές επαγόμενων φορτίων δίνονται από τη σχέση (4.10)²:

$$\rho^{(ind)} \triangleq -\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_{(\epsilon)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}). \quad (\Gamma'.18)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα δύο μέλη της (Γ'.17) στο σημείο (i, j, k) . Για το αριστερό μέλος έχουμε:

$$[\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E})]_{i,j,k} = \frac{\partial(\epsilon_{xx} E_x)}{\partial x} \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial(\epsilon_{yy} E_y)}{\partial y} \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial(\epsilon_{zz} E_z)}{\partial z} \Big|_{i,j,k}. \quad (\Gamma'.19)$$

Προσεγγίζουμε τις χωρικές παραγώγους πρώτης τάξης με πεπερασμένες διαφορές, σύμφωνα με την εξίσωση (Β'.2α'), και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.1):

²Είναι φανερό ότι η $\rho^{(ind)}$ είναι μη μηδενική μόνο για προβλήματα σκέδασης.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\varepsilon_{xx}E_x)}{\partial x} \right|_{i,j,k} &\approx \frac{(\varepsilon_{xx}E_x)|_{i+\frac{1}{2},j,k} - (\varepsilon_{xx}E_x)|_{i-\frac{1}{2},j,k}}{h} = \\ &= \frac{\langle \varepsilon_{xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{i,j,k} - \langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j,k} \rangle E_x^{i-1,j,k}}{h} \end{aligned} \quad (\Gamma'.20\alpha')$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\varepsilon_{yy}E_y)}{\partial y} \right|_{i,j,k} &\approx \frac{(\varepsilon_{yy}E_y)|_{i,j+\frac{1}{2},k} - (\varepsilon_{yy}E_y)|_{i,j-\frac{1}{2},k}}{h} = \\ &= \frac{\langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{i,j,k} - \langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1,k} \rangle E_y^{i,j-1,k}}{h} \end{aligned} \quad (\Gamma'.20\beta')$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\varepsilon_{zz}E_z)}{\partial z} \right|_{i,j,k} &\approx \frac{(\varepsilon_{zz}E_z)|_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (\varepsilon_{zz}E_z)|_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{h} = \\ &= \frac{\langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{i,j,k} - \langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k-1} \rangle E_z^{i,j,k-1}}{h}. \end{aligned} \quad (\Gamma'.20\gamma')$$

Για το δεξί μέλος της (Γ'.17) στο σημείο (i, j, k) έχουμε:

$$\rho|_{i,j,k} = \langle \rho^{i,j,k} \rangle \quad (\Gamma'.21)$$

και

$$\rho^{(ind)}|_{i,j,k} = - \left. \frac{\partial(c_{(\varepsilon)xx}E_x^{(i)})}{\partial x} \right|_{i,j,k} - \left. \frac{\partial(c_{(\varepsilon)yy}E_y^{(i)})}{\partial y} \right|_{i,j,k} - \left. \frac{\partial(c_{(\varepsilon)zz}E_z^{(i)})}{\partial z} \right|_{i,j,k} \quad (\Gamma'.22)$$

ενώ οι χωρικές παράγωγοι μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά ως:

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\partial(c_{(\varepsilon)xx}E_x^{(i)})}{\partial x} \right|_{i,j,k} &\approx \frac{(c_{(\varepsilon)xx}E_x^{(i)})|_{i-\frac{1}{2},j,k} - (c_{(\varepsilon)xx}E_x^{(i)})|_{i+\frac{1}{2},j,k}}{h} = \\ &= \frac{\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j,k} \rangle E_x^{(i)i-1,j,k} - \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{(i)i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.23\alpha') \\ - \left. \frac{\partial(c_{(\varepsilon)yy}E_y^{(i)})}{\partial y} \right|_{i,j,k} &\approx \frac{(c_{(\varepsilon)yy}E_y^{(i)})|_{i,j-\frac{1}{2},k} - (c_{(\varepsilon)yy}E_y^{(i)})|_{i,j+\frac{1}{2},k}}{h} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1,k} \rangle E_y^{(i)i,j-1,k} - \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{(i)i,j,k}}{h} \quad (\Gamma'.23\beta') \\
 - \frac{\partial (c_{(\varepsilon)zz} E_z^{(i)})}{\partial z} \Big|_{i,j,k} &\approx \frac{(c_{(\varepsilon)zz} E_z^{(i)}) \Big|_{i,j,k-\frac{1}{2}} - (c_{(\varepsilon)zz} E_z^{(i)}) \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{h} = \\
 &= \frac{\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k-1} \rangle E_z^{(i)i,j,k-1} - \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{(i)i,j,k}}{h}. \quad (\Gamma'.23\gamma')
 \end{aligned}$$

Γ'.5 Κλίση τής εξίσωσης Gauss

Τρισδιάστατα προβλήματα

Η (Γ'.17) είναι βαθμωτή και η διακριτοποίησή της οδηγεί σε μια μόνο εξίσωση. Για να αποκτήσουμε μια διανυσματική εξίσωση παίρνουμε την κλίση τής (Γ'.17):

$$\nabla \nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (\rho + \rho^{(ind)}). \quad (\Gamma'.24)$$

Αναλύουμε την παραπάνω διανυσματική εξίσωση στις τρεις συνιστώσες της και τις υπολογίζουμε στα σημεία όπου ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στην κυψέλη (i, j, k) :

$$\frac{\partial \nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\partial \rho^{(ind)}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (\Gamma'.25\alpha')$$

$$\frac{\partial \nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{\partial \rho^{(ind)}}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (\Gamma'.25\beta')$$

$$\frac{\partial \nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})}{\partial z} \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \rho^{(ind)}}{\partial z} \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}. \quad (\Gamma'.25\gamma')$$

Προσεγγίζουμε τις χωρικές παραγώγους με πεπερασμένες διαφορές

$$\begin{aligned}
 [\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i+1,j,k} - [\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i,j,k} &= \\
 \rho \Big|_{i+1,j,k} - \rho \Big|_{i,j,k} + \rho^{(ind)} \Big|_{i+1,j,k} - \rho^{(ind)} \Big|_{i,j,k} &\quad (\Gamma'.26\alpha')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i,j+1,k} - [\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i,j,k} &= \\
 \rho \Big|_{i,j+1,k} - \rho \Big|_{i,j,k} + \rho^{(ind)} \Big|_{i,j+1,k} - \rho^{(ind)} \Big|_{i,j,k} &\quad (\Gamma'.26\beta')
 \end{aligned}$$

$$[\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i,j,k+1} - [\nabla \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})] \Big|_{i,j,k} =$$

$$\rho|_{i,j,k+1} - \rho|_{i,j,k} + \rho^{(ind)}|_{i,j,k+1} - \rho^{(ind)}|_{i,j,k} \quad (\Gamma'.26\gamma')$$

και αντικαθιστούμε τις ποσότητες στο αριστερό μέλος από τις (Γ'.19), (Γ'.20) και στο δεξί από τις (Γ'.21), (Γ'.22), (Γ'.23). Παίρνουμε τότε τις παρακάτω τρεις εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned} & \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k-1} \right\rangle E_z^{i,j,k-1} - \left\langle \varepsilon_{zz}^{i+1,j,k-1} \right\rangle E_z^{i+1,j,k-1} \\ & + \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1,k} \right\rangle E_y^{i,j-1,k} - \left\langle \varepsilon_{yy}^{i+1,j-1,k} \right\rangle E_y^{i+1,j-1,k} \\ & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j,k} \right\rangle E_x^{i-1,j,k} \\ & - 2 \left\langle \varepsilon_{xx}^{i,j,k} \right\rangle E_x^{i,j,k} - \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k} \right\rangle E_y^{i,j,k} - \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k} \right\rangle E_z^{i,j,k} \\ & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i+1,j,k} \right\rangle E_x^{i+1,j,k} + \left\langle \varepsilon_{yy}^{i+1,j,k} \right\rangle E_y^{i+1,j,k} + \left\langle \varepsilon_{zz}^{i+1,j,k} \right\rangle E_z^{i+1,j,k} \\ & = - \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k-1} \right\rangle E_z^{(i)i,j,k-1} + \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i+1,j,k-1} \right\rangle E_z^{(i)i+1,j,k-1} \\ & - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1,k} \right\rangle E_y^{(i)i,j-1,k} + \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i+1,j-1,k} \right\rangle E_y^{(i)i+1,j-1,k} \\ & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j,k} \right\rangle E_x^{(i)i-1,j,k} \\ & + 2 \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j,k} \right\rangle E_x^{(i)i,j,k} + \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j,k} \right\rangle E_y^{(i)i,j,k} + \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k} \right\rangle E_z^{(i)i,j,k} \\ & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i+1,j,k} \right\rangle E_x^{(i)i+1,j,k} - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i+1,j,k} \right\rangle E_y^{(i)i+1,j,k} - \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i+1,j,k} \right\rangle E_z^{(i)i+1,j,k} \\ & + \left\langle \rho^{i+1,j,k} \right\rangle - \left\langle \rho^{i,j,k} \right\rangle \quad (\Gamma'.27\alpha') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k-1} \right\rangle E_z^{i,j,k-1} - \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j+1,k-1} \right\rangle E_z^{i,j+1,k-1} \\ & + \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1,k} \right\rangle E_y^{i,j-1,k} \\ & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j,k} \right\rangle E_x^{i-1,j,k} \\ & - \left\langle \varepsilon_{xx}^{i,j,k} \right\rangle E_x^{i,j,k} - 2 \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k} \right\rangle E_y^{i,j,k} - \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k} \right\rangle E_z^{i,j,k} \\ & - \left\langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j+1,k} \right\rangle E_x^{i-1,j+1,k} \\ & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i,j+1,k} \right\rangle E_x^{i,j+1,k} + \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j+1,k} \right\rangle E_y^{i,j+1,k} + \left\langle \varepsilon_{zz}^{i,j+1,k} \right\rangle E_z^{i,j+1,k} \\ & = - \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k-1} \right\rangle E_z^{(i)i,j,k-1} + \left\langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j+1,k-1} \right\rangle E_z^{(i)i,j+1,k-1} \\ & - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1,k} \right\rangle E_y^{(i)i,j-1,k} \\ & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j,k} \right\rangle E_x^{(i)i-1,j,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{(i)i,j,k} + 2 \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{(i)i,j,k} + \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{(i)i,j,k} \\
& + \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j+1,k} \rangle E_x^{(i)i-1,j+1,k} \\
& - \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j+1,k} \rangle E_x^{(i)i,j+1,k} - \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j+1,k} \rangle E_y^{(i)i,j+1,k} - \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j+1,k} \rangle E_z^{(i)i,j+1,k} \\
& + \langle \rho^{i,j+1,k} \rangle - \langle \rho^{i,j,k} \rangle \quad (\Gamma'.27\beta') \\
& \langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k-1} \rangle E_z^{i,j,k-1} + \langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1,k} \rangle E_y^{i,j-1,k} + \langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j,k} \rangle E_x^{i-1,j,k} \\
& - \langle \varepsilon_{xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{i,j,k} - \langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{i,j,k} - 2 \langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{i,j,k} \\
& - \langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1,k+1} \rangle E_y^{i,j-1,k+1} - \langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j,k+1} \rangle E_x^{i-1,j,k+1} \\
& + \langle \varepsilon_{xx}^{i,j,k+1} \rangle E_x^{i,j,k+1} + \langle \varepsilon_{yy}^{i,j,k+1} \rangle E_y^{i,j,k+1} + \langle \varepsilon_{zz}^{i,j,k+1} \rangle E_z^{i,j,k+1} \\
& = - \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k-1} \rangle E_z^{(i)i,j,k-1} - \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1,k} \rangle E_y^{(i)i,j-1,k} - \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j,k} \rangle E_x^{(i)i-1,j,k} \\
& + \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j,k} \rangle E_x^{(i)i,j,k} + \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j,k} \rangle E_y^{(i)i,j,k} + 2 \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k} \rangle E_z^{(i)i,j,k} \\
& + \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1,k+1} \rangle E_y^{(i)i,j-1,k+1} + \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j,k+1} \rangle E_x^{(i)i-1,j,k+1} \\
& - \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j,k+1} \rangle E_x^{(i)i,j,k+1} - \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j,k+1} \rangle E_y^{(i)i,j,k+1} - \langle c_{(\varepsilon)zz}^{i,j,k+1} \rangle E_z^{(i)i,j,k+1} \\
& + \langle \rho^{i,j,k+1} \rangle - \langle \rho^{i,j,k} \rangle. \quad (\Gamma'.27\gamma')
\end{aligned}$$

Δισδιάστατα προβλήματα

Πόλωση TM: Δεν υπάρχει σχετική εξίσωση.

Πόλωση TE: Παίρνουμε δύο εξισώσεις, για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου.

$$\begin{aligned}
& \langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1} \rangle E_y^{i,j-1} - \langle \varepsilon_{yy}^{i+1,j-1} \rangle E_y^{i+1,j-1} \\
& + \langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j} \rangle E_x^{i-1,j} \\
& - 2 \langle \varepsilon_{xx}^{i,j} \rangle E_x^{i,j} - \langle \varepsilon_{yy}^{i,j} \rangle E_y^{i,j} \\
& + \langle \varepsilon_{xx}^{i+1,j} \rangle E_x^{i+1,j} + \langle \varepsilon_{yy}^{i+1,j} \rangle E_y^{i+1,j} \\
& = - \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1} \rangle E_y^{(i)i,j-1} + \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i+1,j-1} \rangle E_y^{(i)i+1,j-1} \\
& - \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j} \rangle E_x^{(i)i-1,j} \\
& + 2 \langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j} \rangle E_x^{(i)i,j} + \langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j} \rangle E_y^{(i)i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i+1,j} \right\rangle E_x^{(i)i+1,j} - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i+1,j} \right\rangle E_y^{(i)i+1,j} \\
 & + \left\langle \rho^{i+1,j} \right\rangle - \left\langle \rho^{i,j} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{Γ'.28α'}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j-1} \right\rangle E_y^{i,j-1} \\
 & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j} \right\rangle E_x^{i-1,j} \\
 & - \left\langle \varepsilon_{xx}^{i,j} \right\rangle E_x^{i,j} - 2 \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j} \right\rangle E_y^{i,j} \\
 & - \left\langle \varepsilon_{xx}^{i-1,j+1} \right\rangle E_x^{i-1,j+1} \\
 & + \left\langle \varepsilon_{xx}^{i,j+1} \right\rangle E_x^{i,j+1} + \left\langle \varepsilon_{yy}^{i,j+1} \right\rangle E_y^{i,j+1} \\
 = & - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j-1} \right\rangle E_y^{(i)i,j-1} \\
 & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j} \right\rangle E_x^{(i)i-1,j} \\
 & + \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j} \right\rangle E_x^{(i)i,j} + 2 \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j} \right\rangle E_y^{(i)i,j} \\
 & + \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i-1,j+1} \right\rangle E_x^{(i)i-1,j+1} \\
 & - \left\langle c_{(\varepsilon)xx}^{i,j+1} \right\rangle E_x^{(i)i,j+1} - \left\langle c_{(\varepsilon)yy}^{i,j+1} \right\rangle E_y^{(i)i,j+1} \\
 & + \left\langle \rho^{i,j+1} \right\rangle - \left\langle \rho^{i,j} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{Γ'.28β'}$$

Παράρτημα Δ'

Κατάστρωση γραμμικού συστήματος πεπερασμένων διαφορών

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών με φορμαλισμό πινάκων. Για όλα τα διανύσματα και τους πίνακες χρησιμοποιούμε την αρίθμηση που ορίστηκε στις εξισώσεις (5.5) και (5.8), σελίδα 76. Αρχικά ορίζουμε βοηθητικούς πίνακες και στη συνέχεια γράφουμε τα αποτελέσματα τού παραρτήματος Γ' στην επιθυμητή μορφή.

Δ'.1 Ορισμός πινάκων μέσης τιμής

Τρισδιάστατα προβλήματα

Γράφουμε τις εξισώσεις (5.2), (5.3) σε μορφή πινάκων:

$$\langle \epsilon \rangle = \mathbf{V}_e \epsilon \quad (\Delta'.1)$$

$$\langle \mu \rangle = \mathbf{V}_m \mu. \quad (\Delta'.2)$$

Οι πίνακες \mathbf{V}_e , \mathbf{V}_m είναι $N \times N$, αραιής μορφής, με τέσσερα και δύο, αντίστοιχα, στοιχεία ανά γραμμή. Όλα τα στοιχεία βρίσκονται σε επτά και τέσσερις διαγωνίους, αντίστοιχα. Οι πίνακες αποτελούνται από επαναλαμβανόμενες τριάδες γραμμών. Οι γραμμές με αριθμούς $l_w = l(w, i, j, k)$, ($w = 1, 2, 3$) δίνονται από τις σχέσεις (Δ'.10), (Δ'.11) (σελίδα 137).¹ Οι δείκτες κάτω από τις αγκύλες προσδιορίζουν τη στήλη όπου ανήκει κάθε στοιχείο.

¹Υπενθυμίζεται ότι με $\mathbf{A}_{l,*}$ συμβολίζεται το διάνυσμα-στήλη που προκύπτει από τη γραμμή l τού πίνακα \mathbf{A} .

Ο πολλαπλασιασμός του πίνακα \mathbf{V}_e με ένα διάνυσμα ηλεκτρικών παραμέτρων ($\epsilon, \sigma, \dot{\epsilon}, \mathbf{c}_\epsilon, \mathbf{c}_\sigma, \dot{\mathbf{c}}_e$) δίνει το διάνυσμα των μέσων τιμών των παραμέτρων.

Ανάλογα ισχύουν και για τον πολλαπλασιασμό του πίνακα \mathbf{V}_m με ένα διάνυσμα μαγνητικών παραμέτρων ($\mu, \sigma^*, \dot{\mu}, \mathbf{c}_\mu, \mathbf{c}_{\sigma^*}, \dot{\mathbf{c}}_m$).

Η εξίσωση (5.4) σε μορφή πινάκων δίνει:

$$\langle \rho \rangle = \mathbf{V}_\rho \rho. \quad (\Delta'.3)$$

Ο πίνακας \mathbf{V}_ρ είναι αραιής μορφής, με οχτώ μη μηδενικά στοιχεία ανά γραμμή και διαστάσεις $(N/3) \times (N/3)$. Για τη γραμμή με αριθμό p ισχύει:

$$\mathbf{V}_{\rho p,*}^T = \frac{1}{8} (\dots \underbrace{1}_{p-1-N_x-N_x N_y} \underbrace{1}_{p-N_x-N_x N_y} \dots \underbrace{1}_{p-1-N_x N_y} \underbrace{1}_{p-N_x N_y} \dots \dots \underbrace{1}_{p-1-N_x} \underbrace{1}_{p-N_x} \dots \underbrace{1}_{p-1} \underbrace{1}_p \dots). \quad (\Delta'.4)$$

Ο πίνακας \mathbf{V}_ρ , όταν πολλαπλασιάσει ένα διάνυσμα τιμών βαθμωτού πεδίου ($\rho, \rho^s, \rho^{\text{ind}}$), δίνει το διάνυσμα των μέσων τιμών.

Δισδιάστατα προβλήματα

Οι πίνακες μέσων τιμών δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$\mathbf{V}_{\rho p,*}^T = \frac{1}{4} (\dots \underbrace{1}_{p-1-N_x} \underbrace{1}_{p-N_x} \dots \underbrace{1}_{p-1} \underbrace{1}_p \dots). \quad (\Delta'.5)$$

Πόλωση TM: $N = N_x N_y$

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{I}_N \quad (\Delta'.6)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{m l_1,*}^T \\ \mathbf{V}_{m l_2,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_{l_1-2} & 0 & \underbrace{1}_{l_1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \underbrace{1}_{l_2-2N_x} & \dots & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_2} & \dots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.7)$$

Πόλωση TE: $N = 2N_x N_y$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{e l_1,*}^T \\ \mathbf{V}_{e l_2,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dots & \underbrace{1}_{l_1-2N_x} & 0 & \dots & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{l_2-2} & 0 & \underbrace{1}_{l_2} & \dots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.8)$$

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{I}_{N/2} \quad (\Delta'.9)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{\mathbf{e}l_1,*}^T \\ \mathbf{V}_{\mathbf{e}l_2,*}^T \\ \mathbf{V}_{\mathbf{e}l_3,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \dots & \underbrace{1}_{l_1-3N_x-3N_xN_y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_1-3N_xN_y} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{l_2-3-3N_xN_y} & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_2-3N_xN_y} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_1-3N_x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{l_2-3} & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3-3-3N_x} & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3-3N_x} & \dots & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3-3} & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3} & \dots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.10)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{\mathbf{m}l_1,*}^T \\ \mathbf{V}_{\mathbf{m}l_2,*}^T \\ \mathbf{V}_{\mathbf{m}l_3,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_{l_1-3} & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{l_2-3N_x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3-3N_xN_y} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{l_3} & \dots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.11)$$

Δ'.2 Εξίσωση Faraday

Ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του προβλήματος και την πόλωση, οι εξισώσεις (Γ'.4) (3Δ), (Γ'.5) (2D-TM), (Γ'.6) (2D-TE), μπορούν να γραφούν σε μορφή γραμμικού συστήματος:

$$j\omega \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle) \mathbf{h} = -\mathbf{A}_e \mathbf{e} - \mathbf{m}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{A}_e \mathbf{e} = -j\omega \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle) \mathbf{h} - \mathbf{m}. \quad (\Delta'.12)$$

Συγκρίνοντας την (Δ'.12) με την (4.1γ') (σελίδα 63) βλέπουμε ότι ο πίνακας \mathbf{A}_e μπορεί να θεωρηθεί αναπαράσταση του τελεστή του στροβιλισμού.

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ο \mathbf{A}_e δίνεται από τη σχέση (Δ'.15) (σελίδα 139). Είναι πίνακας $N \times N$ ($N = 3N_x N_y N_z$) αραιής μορφής και κάθε γραμμή περιέχει τέσσερα μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε εννιά διαγωνίους, ενώ η κύρια διαγώνιος έχει μόνο μηδενικά.

Δισδιάστατα προβλήματα

Πόλωση TM: Ο \mathbf{A}_e δίνεται από τη σχέση (Δ'.13). Είναι πίνακας $2N \times N$ ($N = N_x N_y$) αραιής μορφής και κάθε γραμμή περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε τρεις διαγωνίους.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{e_{l_1,*}}^T \\ \mathbf{A}_{e_{l_2,*}}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & \underbrace{-1}_p & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{p+N_x} & \cdots \\ \cdots & \underbrace{+1}_p & \underbrace{-1}_{p+1} & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.13)$$

Πόλωση TE: Ο \mathbf{A}_e δίνεται από τη σχέση (Δ'.14). Είναι πίνακας $N/2 \times N$ ($N = 2N_x N_y$) αραιής μορφής και κάθε γραμμή περιέχει τέσσερα μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε τέσσερις διαγωνίους.

$$(\mathbf{A}_{e_{p,*}}^T) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & \underbrace{+1}_{l_1} & \underbrace{-1}_{l_2} & 0 & \underbrace{+1}_{l_2+2} & \cdots & \underbrace{-1}_{l_1+2N_x} & 0 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.14)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{e}l_1,*}^T \\ \mathbf{A}_{\mathbf{e}l_2,*}^T \\ \mathbf{A}_{\mathbf{e}l_3,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+1} & \underbrace{-1}_{l_1+2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+2+3N_x} & \cdots & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+1+3N_xN_y} & 0 & \cdots \\ \cdots & \underbrace{-1}_{l_2-1} & 0 & \underbrace{+1}_{l_2+1} & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_2+4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_2-1+3N_xN_y} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \underbrace{+1}_{l_3-2} & \underbrace{-1}_{l_3-1} & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_3+2} & 0 & \cdots & \underbrace{-1}_{l_3-2+3N_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.15)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{h}l_1,*}^T \\ \mathbf{A}_{\mathbf{h}l_2,*}^T \\ \mathbf{A}_{\mathbf{h}l_3,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+1-3N_xN_y} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+2-3N_x} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+1} & \underbrace{+1}_{l_1+2} & \cdots \\ \cdots & \underbrace{-1}_{l_2-1-3N_xN_y} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_2-2} & \underbrace{+1}_{l_2-1} & 0 & \underbrace{-1}_{l_2+1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_3-2-3N_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{-1}_{l_3-4} & 0 & \underbrace{-1}_{l_3-2} & \underbrace{-1}_{l_3-1} & \underbrace{+1}_{l_3-1} & \cdots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.16)$$

Δ'.3 Εξίσωση Maxwell-Ampère

Οι εξισώσεις (Γ'.10) (3Δ), (Γ'.11) (2D-TM), (Γ'.12) (2D-TE), μπορούν να γραφούν σε μορφή γραμμικού συστήματος:

$$j\omega \text{diag}(\langle \epsilon \rangle) \mathbf{e} = \mathbf{A}_h \mathbf{h} - \mathbf{j}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{A}_h \mathbf{h} = j\omega \text{diag}(\langle \epsilon \rangle) \mathbf{e} + \mathbf{j}. \quad (\Delta'.17)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι το ανάλογο της (4.1δ') (σελίδα 63) σε μορφή γραμμικού συστήματος.

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ο πίνακας \mathbf{A}_h δίνεται από τη σχέση (Δ'.16) (σελίδα 139). Από τις (Δ'.15), (Δ'.16) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_e^T.$$

Δισδιάστατα προβλήματα

Πόλωση TM: Ο \mathbf{A}_h δίνεται από τη σχέση (Δ'.18). Είναι πίνακας $N \times 2N$ ($N = N_x N_y$) αραιής μορφής και κάθε γραμμή περιέχει τέσσερα μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε τέσσερις διαγωνίους.

$$(\mathbf{A}_{hp,*}^T) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & \underbrace{+1}_{l_1-2N_x} & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{-1}_{l_2-2} & \underbrace{-1}_{l_1} & \underbrace{+1}_{l_2} \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.18)$$

Από την παραπάνω σχέση και την (Δ'.13) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_e^T.$$

Πόλωση TE: Ο \mathbf{A}_h δίνεται από τη σχέση (Δ'.19). Είναι πίνακας $N \times N/2$ ($N = 2N_x N_y$) αραιής μορφής και κάθε γραμμή περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε τέσσερις διαγωνίους.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{hl_1,*}^T \\ \mathbf{A}_{hl_2,*}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdots & \underbrace{-1}_{p-N_x} & \cdots & 0 & \underbrace{+1}_p & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{p-1} & \underbrace{-1}_p & \cdots \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.19)$$

Από την παραπάνω σχέση και την (Δ'.14) προκύπτει ότι και γι' αυτή την περίπτωση:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_e^T.$$

Δ'.4 Κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο

Από τις εξισώσεις (Δ'.12), (Δ'.17), με απαλοιφή του διανύσματος των τιμών του μαγνητικού πεδίου, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$[\mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle)^{-1} \mathbf{A}_e - \omega^2 \text{diag}(\langle \dot{\epsilon} \rangle)] \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{j} - \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\langle \dot{\mu} \rangle)^{-1} \mathbf{m}. \quad (\Delta'.20)$$

Δ'.5 Κλίση τής εξίσωσης Gauss

Οι εξισώσεις (Γ'.27) (3Δ) και (Γ'.28) (2D-TE) μπορούν να γραφούν σε μορφή γραμμικού συστήματος:

$$\mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \epsilon \rangle) \mathbf{e} = -\mathbf{A}_g \text{diag}(\langle \mathbf{c}_\epsilon \rangle) \mathbf{e}^i - \mathbf{A}_\rho \langle \rho \rangle. \quad (\Delta'.21)$$

Τρισδιάστατα προβλήματα

Ο πίνακας \mathbf{A}_g δίνεται από τη σχέση (Δ'.24) (σελίδα 143). Είναι πίνακας $N \times N$ αραιής μορφής. Κάθε γραμμή περιέχει έντεκα μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε είκοσι οχτώ διαγωνίους. Όπως προκύπτει από τη δομή του πίνακα, ο \mathbf{A}_g είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{A}_g^T = \mathbf{A}_g.$$

Ο \mathbf{A}_ρ είναι πίνακας $N \times (N/3)$ αραιής μορφής. Κάθε γραμμή περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε έξι διαγωνίους. Στην παρακάτω σχέση, που ορίζει τον πίνακα \mathbf{A}_ρ , οι δείκτες l_1, l_2, l_3 και p αφορούν τις ίδιες τιμές των i, j, k .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\rho l_1, *}^T \\ \mathbf{A}_{\rho l_2, *}^T \\ \mathbf{A}_{\rho l_3, *}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \underbrace{+1}_p & \underbrace{-1}_{p+1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \underbrace{+1}_p & 0 & \dots & \underbrace{-1}_{p+N_x} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \underbrace{+1}_p & 0 & \dots & 0 & \dots & \underbrace{-1}_{p+N_x N_y} & \dots \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.22)$$

Δισδιάστατα προβλήματα

Πόλωση TM: Δεν υπάρχει σχετική εξίσωση, γι' αυτό θεωρούμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_\rho &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Πόλωση TE: Ο πίνακας $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}$ δίνεται από τη σχέση (Δ'.25) (σελίδα 144). Είναι πίνακας $N \times N$ αραιής μορφής. Κάθε γραμμή περιέχει εφτά μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε δεκατρείς διαγωνίους. Ο $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}$ είναι συμμετρικός:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{g}}^T = \mathbf{A}_{\mathbf{g}}.$$

Ο \mathbf{A}_{ρ} είναι πίνακας $N \times (N/2)$ αραιής μορφής. Κάθε γραμμή περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία. Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται σε τέσσερις διαγωνίους.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\rho_{l_1,*}}^T \\ \mathbf{A}_{\rho_{l_2,*}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \underbrace{+1}_p & \underbrace{-1}_{p+1} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \underbrace{+1}_p & 0 & \cdots & \underbrace{-1}_{p+N_x} & \cdots \end{pmatrix}. \quad (\Delta'.23)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{g}_{l_1,*}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{g}_{l_2,*}^T \\ \mathbf{A} \mathbf{g}_{l_3,*}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+2-3N_xN_y} & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+5-3N_xN_y} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_2+1-3N_xN_y} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_2+1+3N_x-3N_xN_y} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_3-3N_xN_y} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+1-3N_x} & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+4-3N_x} & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_1-3} & 0 & 0 & \underbrace{-2}_{l_1} & \underbrace{-1}_{l_1+1} & \underbrace{-1}_{l_1+2} & \underbrace{+1}_{l_1+3} & \underbrace{+1}_{l_1+4} & \underbrace{+1}_{l_1+5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_2-3N_x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_2-4} & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_2-1} & \underbrace{-2}_{l_2} & \underbrace{-1}_{l_2+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{-1}_{l_2-4+3N_x} & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_3-1-3N_x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_3-5} & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{l_3-2} & \underbrace{-1}_{l_3-1} & \underbrace{-2}_{l_3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \underbrace{+1}_{l_2-1+3N_x} & \underbrace{+1}_{l_2+3N_x} & \underbrace{+1}_{l_2+1+3N_x} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{-1}_{l_3-1-3N_x+3N_xN_y} & 0 & \cdots & \underbrace{-1}_{l_3-5+3N_xN_y} & 0 & 0 & \underbrace{+1}_{l_3-2+3N_xN_y} & \underbrace{+1}_{l_3-1+3N_xN_y} & \underbrace{+1}_{l_3+3N_xN_y} & \cdots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.24)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{g_{l_1,*}}^T \\ \mathbf{A}_{g_{l_2,*}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_1+1-2N_x} & 0 & \underbrace{-1}_{l_1+3-2N_x} & \cdots & \underbrace{+1}_{l_1-2} & 0 & \underbrace{-2}_{l_1} & \underbrace{-1}_{l_1+1} \\ \cdots & 0 & \underbrace{+1}_{l_2-2N_x} & 0 & 0 & \cdots & \underbrace{+1}_{l_2-2} & 0 & \underbrace{-1}_{l_2-1} & \underbrace{-2}_{l_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{+1}_{l_1+2} & \underbrace{+1}_{l_1+3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{-1}_{l_2-3+2N_x} & 0 & \underbrace{+1}_{l_2-1+2N_x} & \underbrace{+1}_{l_2+2N_x} & \cdots \end{pmatrix} \quad (\Delta'.25)$$

Παράρτημα Ε΄

Πίνακες περιορισμένης ταυτότητας

Ε΄.1 Ορισμός και ιδιότητες

Θεωρούμε το σύνολο \mathcal{N} των φυσικών αριθμών από 1 ως N :

$$\mathcal{N} = \{n : 1 \leq n \leq N\}$$

και ένα υποσύνολό του $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$. Συμβολίζουμε με $\overline{\mathcal{A}}$ το συμπληρωματικό σύνολο τού \mathcal{A} ως προς το \mathcal{N} , δηλαδή $\mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{N}$ και $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Ο πίνακας περιορισμένης ταυτότητας $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ ορίζεται ως ο διαγώνιος πίνακας, διαστάσεων $N \times N$, για τον οποίο ισχύει:

$$I_{\mathcal{A}ij} \triangleq \begin{cases} 0 & i = j \in \mathcal{A} \\ 1 & i = j \notin \mathcal{A} \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{Ε΄.1})$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι ο πίνακας $\mathbf{I}_{\overline{\mathcal{A}}}$ (ο οποίος χρησιμοποιεί το σύνολο $\overline{\mathcal{A}}$) είναι συμπληρωματικός τού $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ με την ακόλουθη έννοια:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}} + \mathbf{I}_{\overline{\mathcal{A}}} = \mathbf{I}$$

όπου \mathbf{I} ο $N \times N$ μοναδιαίος πίνακας.

Οι πίνακες περιορισμένης ταυτότητας (ίδιων διαστάσεων) αντιμετωπίζονται. Όπως προκύπτει από τον ορισμό, για το γινόμενο M πινάκων ισχύει:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}_1} \mathbf{I}_{\mathcal{A}_2} \dots \mathbf{I}_{\mathcal{A}_M} = \mathbf{I}_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_M} \triangleq \mathbf{I}_{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_M}$$

ενώ ορίζουμε τον αντίστοιχο συμπληρωματικό πίνακα ως:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_M} \triangleq \mathbf{I}_{\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\ldots\cup\mathbf{A}_M} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_M}.$$

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα \mathbf{B} , διαστάσεων $N \times N$, από αριστερά με τον πίνακα $\mathbf{I}_{\mathbf{A}}$ έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό των γραμμών του \mathbf{B} των οποίων οι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{I}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}'_{i,*} &= \begin{cases} \mathbf{0} & i \in \mathcal{A} \\ \mathbf{B}_{i,*} & i \notin \mathcal{A} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E'.2})$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός από δεξιά έχει ως αποτέλεσμα το μηδενισμό των στηλών:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{B}\mathbf{I}_{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B}'_{*,j} &= \begin{cases} \mathbf{0} & j \in \mathcal{A} \\ \mathbf{B}_{*,j} & j \notin \mathcal{A} \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{E'.3})$$

Για ένα διάνυσμα \mathbf{b} , μήκους N , ορίζεται μόνο ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον πίνακα $\mathbf{I}_{\mathbf{A}}$. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι ο μηδενισμός των στοιχείων του \mathbf{b} των οποίων οι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \mathbf{I}_{\mathbf{A}}\mathbf{b} \\ b'_i &= \begin{cases} 0 & i \in \mathcal{A} \\ b_i & i \notin \mathcal{A} \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{E'.4})$$

Ο πίνακας $\mathbf{I}_{\mathbf{A}}$ και ο συμπληρωματικός του $\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{A}}}$ μπορούν να συνδυαστούν για πιο περίπλοκες τροποποιήσεις, όπως για παράδειγμα ο μηδενισμός γραμμών/στηλών ενός πίνακα και η αντικατάσταση των αντίστοιχων διαγώνιων στοιχείων από τη μονάδα:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{A}}} + \mathbf{I}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\mathbf{I}_{\mathbf{A}} \\ B'_{ij} &= \begin{cases} 0 & i \in \mathcal{A} \text{ ή } j \in \mathcal{A} \\ 1 & i = j \in \mathcal{A} \\ B_{ij} & i \notin \mathcal{A} \text{ και } j \notin \mathcal{A} \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{E'.5})$$

Ε'.2 Πίνακας εξωτερικού αγωγού

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ το οποίο περιλαμβάνει τους δείκτες όλων των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες είναι εφαπτομενικές στον εξωτερικό ηλεκτρικό αγωγό ή βρίσκονται στο εσωτερικό αυτού. Για την τρισδιάστατη περίπτωση που παρουσιάζουμε εδώ, η αρίθμηση των συνιστωσών γίνεται πάντα σύμφωνα με την εξίσωση (5.5) (σελίδα 75). Το σύνολο \mathcal{C} μπορεί να γραφεί ως ένωση έξι συνόλων, το καθένα από τα οποία αναφέρεται σε μια πλευρά του εξωτερικού αγωγού:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^l \cup \mathcal{C}^f \cup \mathcal{C}^d \cup \mathcal{C}^r \cup \mathcal{C}^b \cup \mathcal{C}^u \quad (\text{E'.6})$$

όπου:

$$\mathcal{C}^l = \{l(w, i, j, k) : w = 2, 3, i = 1\} \quad (\text{E'.7}\alpha')$$

$$\mathcal{C}^f = \{l(w, i, j, k) : w = 1, 3, j = 1\} \quad (\text{E'.7}\beta')$$

$$\mathcal{C}^d = \{l(w, i, j, k) : w = 1, 2, k = 1\} \quad (\text{E'.7}\gamma')$$

$$\mathcal{C}^r = \{l(w, i, j, k) : w = 1, 2, 3, i = N_x\} \quad (\text{E'.7}\delta')$$

$$\mathcal{C}^b = \{l(w, i, j, k) : w = 1, 2, 3, j = N_y\} \quad (\text{E'.7}\epsilon')$$

$$\mathcal{C}^u = \{l(w, i, j, k) : w = 1, 2, 3, k = N_z\}. \quad (\text{E'.7}\zeta')$$

Αντίστοιχα ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{N}$ το οποίο περιλαμβάνει τους δείκτες όλων των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες είναι κάθετες στον εξωτερικό ηλεκτρικό αγωγό:

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n^l \cup \mathcal{C}_n^f \cup \mathcal{C}_n^d \cup \mathcal{C}_n^r \cup \mathcal{C}_n^b \cup \mathcal{C}_n^u \quad (\text{E'.8})$$

όπου:

$$\mathcal{C}_n^l = \{l(w, i, j, k) : w = 1, i = 1\} \quad (\text{E'.9}\alpha')$$

$$\mathcal{C}_n^f = \{l(w, i, j, k) : w = 2, j = 1\} \quad (\text{E'.9}\beta')$$

$$\mathcal{C}_n^d = \{l(w, i, j, k) : w = 3, k = 1\} \quad (\text{E'.9}\gamma')$$

$$\mathcal{C}_n^r = \{l(w, i, j, k) : w = 1, i = N_x - 1\} \quad (\text{E'.9}\delta')$$

$$\mathcal{C}_n^b = \{l(w, i, j, k) : w = 2, j = N_y - 1\} \quad (\text{E'.9}\epsilon')$$

$$\mathcal{C}_n^u = \{l(w, i, j, k) : w = 3, k = N_z - 1\}. \quad (\text{E'.9}\zeta')$$

Οι πίνακες περιορισμένης ταυτότητας $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{C}_n}$ και $\mathbf{I}_{\mathcal{C}_n}$ αναφέρονται αποκλειστικά στον τέλειο ηλεκτρικό αγωγό που περικλείει τον υπολογιστικό χώρο.

Οι παραπάνω πίνακες μπορούν να οριστούν και για δισδιάστατες (2D-TM, 2D-TE) γεωμετρίες με προφανή τρόπο.

Ε'.3 Πίνακας εσωτερικών αγωγών

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, το οποίο περιλαμβάνει τους δείκτες όλων των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες είναι εφαιπτομενικές ή βρίσκονται στο εσωτερικό τέλειων ηλεκτρικών αγωγών του υπολογιστικού χώρου. Επίσης θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{N}$ που περιλαμβάνει τους δείκτες όλων των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες είναι κάθετες στους τέλειους ηλεκτρικούς αγωγούς του υπολογιστικού χώρου. Οι πίνακες περιορισμένης ταυτότητας $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}$, $\mathbf{I}_{\overline{\mathcal{M}}}$ και $\mathbf{I}_{\mathcal{M}_n}$ αναφέρονται αποκλειστικά στους τέλειους ηλεκτρικούς αγωγούς που βρίσκονται στο εσωτερικό του υπολογιστικού χώρου.

Ε'.4 Πίνακας εφαρμοσμένων δυναμικών

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$, το οποίο περιλαμβάνει τους δείκτες όλων των συνιστωσών ηλεκτρικού πεδίου για τις οποίες εφαρμόζονται συγκεκριμένες τιμές δυναμικού. Με βάση το σύνολο \mathcal{V} ορίζουμε τους πίνακες περιορισμένης ταυτότητας $\mathbf{I}_{\mathcal{V}}$ και $\mathbf{I}_{\overline{\mathcal{V}}}$.

Παράρτημα ϵ'

Αριθμητική ολοκλήρωση

$\epsilon'.1$ Απλή ολοκλήρωση

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας γνωρίζουμε τις τιμές στα σημεία $x_i = x_0 + ih$. Συμβολίζουμε με $f_i \triangleq f(x_i)$. Το ολοκλήρωμα της f μπορεί να προσεγγιστεί με τον παρακάτω τρόπο (Press et al., 1992):

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^N (s_N)_i f_i = h \mathbf{s}_N^T \mathbf{f} \quad (\epsilon'.1)$$

όπου

$$\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_N)^T$$

και, ανάλογα με την τάξη της προσέγγισης, τα βάρη παίρνουν τις τιμές:

$$\mathbf{s}_N = \left(\frac{1}{2} \ 1 \ \cdots \ \underbrace{1}_{N-1} \ \underbrace{\frac{1}{2}}_N \right)^T \quad \text{δεύτερη τάξη} \quad (\epsilon'.2\alpha')$$

$$\mathbf{s}_N = \left(\frac{5}{12} \ \frac{13}{12} \ 1 \ \cdots \ \underbrace{1}_{N-2} \ \underbrace{\frac{13}{12}}_{N-1} \ \underbrace{\frac{5}{12}}_N \right)^T \quad \text{τρίτη τάξη} \quad (\epsilon'.2\beta')$$

$$\mathbf{s}_N = \left(\frac{3}{8} \ \frac{7}{6} \ \frac{23}{24} \ 1 \ \cdots \ \underbrace{1}_{N-3} \ \underbrace{\frac{23}{24}}_{N-2} \ \underbrace{\frac{7}{6}}_{N-1} \ \underbrace{\frac{3}{8}}_N \right)^T \quad \text{τέταρτη τάξη.} \quad (\epsilon'.2\gamma')$$

ɛ'.2 Διπλή ολοκλήρωση

Έστω μια συνάρτηση $f(x, y)$ τής οποίας γνωρίζουμε τις τιμές στα σημεία (x_i, y_j) όπου $x_i = x_0 + ih_x$ και $y_j = y_0 + jh_y$. Συμβολίζουμε με $f_{ij} \triangleq f(x_i, y_j)$. Το διπλό ολοκλήρωμα τής f μπορεί να προσεγγιστεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{(x_1, y_1)}^{(x_N, y_M)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y_1}^{y_M} \left(\int_{x_1}^{x_N} f(x, y) \, dx \right) \, dy \\ &\approx \int_{y_1}^{y_M} \left(h_x \sum_{i=1}^N (s_N)_i f_{ij} \right) \, dy \\ &\approx h_x h_y \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (s_N)_i (s_M)_j f_{ij} = h_x h_y \mathbf{s}_N^T \mathbf{F} \mathbf{s}_M \end{aligned} \quad (\varepsilon'.3)$$

όπου τα στοιχεία τού πίνακα \mathbf{F} , διαστάσεων $N \times M$, είναι οι τιμές f_{ij} .

Το ολοκλήρωμα I_2 μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$I_2 \approx h_x h_y \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (d_{NM})_{ij} f_{ij} \quad (\varepsilon'.4)$$

όπου τα βάρη $(d_{NM})_{ij} = (s_N)_i (s_M)_j$ είναι τα στοιχεία τού πίνακα \mathbf{D}_{NM} , διαστάσεων $N \times M$, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{D}_{NM} = \mathbf{s}_N \mathbf{s}_M^T. \quad (\varepsilon'.5)$$

Παράρτημα Ζ'

Ολοκλήρωμα Kirchhoff

Θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα τής εξίσωσης (5.40) (σελίδα 89) με διακριτά αθροίσματα.

Ας υποθέσουμε ότι οι κόμβοι (i_1, j_1, k_1) και (i_2, j_2, k_2) ορίζουν έναν κύβο που περικλείει όλες τις πηγές. Επειδή οι τρεις συνιστώσες τού πεδίου δεν είναι ορισμένες στο ίδιο σημείο, χρησιμοποιούμε τρεις κύβους, ελαφρώς μετατοπισμένους μεταξύ τους, για τον υπολογισμό τού ολοκληρώματος Kirchhoff. Για τον υπολογισμό τής συνιστώσας E_x χρησιμοποιείται η επιφάνεια τού κύβου με κορυφές στα σημεία $(i_1 + \frac{1}{2}, j_1, k_1)h$ και $(i_2 + \frac{1}{2}, j_2, k_2)h$. Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό τής E_y χρησιμοποιείται η επιφάνεια τού κύβου με κορυφές στα σημεία $(i_1, j_1 + \frac{1}{2}, k_1)h$ και $(i_2, j_2 + \frac{1}{2}, k_2)h$ και για την E_z χρησιμοποιείται η επιφάνεια τού κύβου με κορυφές στα $(i_1, j_1, k_1 + \frac{1}{2})h$ και $(i_2, j_2, k_2 + \frac{1}{2})h$.

Οι κατευθυντικές παράγωγοι πρώτης τάξης τής σχέσης (5.40) προσεγγίζονται με πεπερασμένες διαφορές, σύμφωνα με την εξίσωση (B'.2α') (σελίδα 119).

Υπολογίζουμε το μακρινό πεδίο στο σημείο $\mathbf{r}_f = x_f \hat{\mathbf{x}} + y_f \hat{\mathbf{y}} + z_f \hat{\mathbf{z}}$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα τού Παραρτήματος ζ' (σχέση (ζ'.4), σελίδα 150), το επιφανειακό ολοκλήρωμα (5.40) για τις τρεις συνιστώσες τού ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά στην παρακάτω μορφή:

$$E_v(\mathbf{r}_f) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (d_x)_{jk} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i_1,j,k}}}{R_{v,f}^{i_1,j,k}} \left[\frac{E_v^{i_1-1,j,k} - E_v^{i_1+1,j,k}}{2h} - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i_1,j,k}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i_1,j,k}} \mathbf{R}_{v,f}^{i_1,j,k} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) E_v^{i_1,j,k} \right] h^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (d_x)_{jk} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i_2,j,k}}}{R_{v,f}^{i_2,j,k}} \left[\frac{E_v^{i_2+1,j,k} - E_v^{i_2-1,j,k}}{2h} - \right. \\
& \quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i_2,j,k}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i_2,j,k}} \mathbf{R}_{v,f}^{i_2,j,k} \cdot (+\hat{\mathbf{x}}) E_v^{i_2,j,k} \right] h^2 - \\
& -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (d_y)_{ik} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i,j_1,k}}}{R_{v,f}^{i,j_1,k}} \left[\frac{E_v^{i,j_1-1,k} - E_v^{i,j_1+1,k}}{2h} - \right. \\
& \quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i,j_1,k}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i,j_1,k}} \mathbf{R}_{v,f}^{i,j_1,k} \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) E_v^{i,j_1,k} \right] h^2 - \\
& -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (d_y)_{ik} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i,j_2,k}}}{R_{v,f}^{i,j_2,k}} \left[\frac{E_v^{i,j_2+1,k} - E_v^{i,j_2-1,k}}{2h} - \right. \\
& \quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i,j_2,k}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i,j_2,k}} \mathbf{R}_{v,f}^{i,j_2,k} \cdot (+\hat{\mathbf{y}}) E_v^{i,j_2,k} \right] h^2 - \\
& -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} (d_z)_{ij} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i,j,k_1}}}{R_{v,f}^{i,j,k_1}} \left[\frac{E_v^{i,j,k_1-1} - E_v^{i,j,k_1+1}}{2h} - \right. \\
& \quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i,j,k_1}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i,j,k_1}} \mathbf{R}_{v,f}^{i,j,k_1} \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) E_v^{i,j,k_1} \right] h^2 - \\
& -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} (d_z)_{ij} \frac{e^{-jkR_{v,f}^{i,j,k_2}}}{R_{v,f}^{i,j,k_2}} \left[\frac{E_v^{i,j,k_2+1} - E_v^{i,j,k_2-1}}{2h} - \right. \\
& \quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R_{v,f}^{i,j,k_2}} \right) \frac{1}{R_{v,f}^{i,j,k_2}} \mathbf{R}_{v,f}^{i,j,k_2} \cdot (+\hat{\mathbf{z}}) E_v^{i,j,k_2} \right] h^2 \quad (\text{Z'.1})
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{x,f}^{i,j,k} &= [x_f - (i + 0.5)h] \hat{\mathbf{x}} + [y_f - jh] \hat{\mathbf{y}} + [z_f - kh] \hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{R}_{y,f}^{i,j,k} &= [x_f - ih] \hat{\mathbf{x}} + [y_f - (j + 0.5)h] \hat{\mathbf{y}} + [z_f - kh] \hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{R}_{z,f}^{i,j,k} &= [x_f - ih] \hat{\mathbf{x}} + [y_f - jh] \hat{\mathbf{y}} + [z_f - (k + 0.5)h] \hat{\mathbf{z}} \\
R_{v,f}^{i,j,k} &= |\mathbf{R}_{v,f}^{i,j,k}|.
\end{aligned}$$

Οι πίνακες \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y , \mathbf{D}_z περιέχουν τα βάρη τής αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Αν ορίσουμε

$$I = i_2 - i_1$$

$$J = j_2 - j_1$$

$$K = k_2 - k_1$$

τότε, σύμφωνα με τη σχέση (τ'.5) (σελίδα 150), έχουμε:

$$\mathbf{D}_x = \mathbf{s}_J \mathbf{s}_K^T$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{s}_I \mathbf{s}_K^T$$

$$\mathbf{D}_z = \mathbf{s}_I \mathbf{s}_J^T$$

όπου τα διανύσματα \mathbf{s} ορίζονται από τις σχέσεις (τ'.2) (σελίδα 149).

Βιβλιογραφία

- M. F. Adams and A. P. Anderson. Synthetic Aperture Tomography (SAT) Imaging for Microwave Diagnostics. *IEEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, 129:83–88, 1982.
- I. Aliferis, C. Dourthe, J.-Y. Dauvignac, and C. Pichot. Nonlinear Inversion Algorithm for Tomographic Reconstructions of Buried Objects. In *Progress in Electromagnetic Research Symposium*, page 290, July 5–14, 2000a. Cambridge, USA.
- I. Aliferis, K. Ntanaka, and P. V. Frangos. A multilayer model for the reconstruction of sea bottom acoustic parameters. In N. K. Uzunoglu, K. S. Nikita, and D. Kaklamani, editors, *Applied Computational Electromagnetics*, number 171 in NATO ASI Series. Series F: Computer and Systems Sciences, pages 377–389. Springer-Verlag, Berlin, 2000b.
- I. Aliferis, C. Pichot, J.-Y. Dauvignac, and E. Guillaumont. Tomographic Reconstruction of Buried Objects Using a Nonlinear and Regularized Inversion Method. In P. di Barba and A. Savini, editors, *Non-Linear Electromagnetic Systems*, number 18 in Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, pages 237–240. IOS Press, Amsterdam, 2000c.
- C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- C. A. Balanis. *Antenna Theory, Analysis and Design*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1997.
- M. Baribaud, F. Dubois, R. Floyrac, M. Kom, and S. Wong. Tomographic Image Reconstruction of Biological Objects from Coherent Microwave Diffraction Data. *IEEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, 129:356–359, 1982.

- K. Beilenhoff and W. Heinrich. Improved Finite-Difference Formulation in Frequency Domain for Three-Dimensional Scattering Problems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 40(3):540–546, March 1992.
- K. Belkebir, R. E. Kleinman, and C. Pichot. Microwave Imaging—Location and Shape Reconstruction from Multifrequency Scattering Data. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 45(4):469–476, April 1997.
- J.-P. Bérenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200, 1 October 1994.
- J.-P. Bérenger. Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(1):110–117, January 1996.
- R. F. Bloemenkamp and P. M. van den Berg. Time-domain profile inversion using contrast sources. *Inverse Problems*, 16(5):1173–1193, October 2000.
- J.-C. Bolomey, A. Izadnegahdar, L. Jofre, C. Pichot, G. Peronnet, and M. Solaimani. Microwave Diffraction Tomography for Biomedical Application. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 30:1998–2000, 1982.
- J.-C. Bolomey and C. Pichot. Planar microwave imaging camera for biomedical applications: Critical and prospective analysis of reconstruction algorithms. *Radio Science*, 26(2):541–549, March-April 1991.
- S. Bonnard, P. Vincent, and M. Saillard. Cross-Borehole Inverse Scattering Using a Boundary Finite-Element Method. *Inverse Problems*, 14(3):521–534, June 1998.
- S. Bonnard, P. Vincent, and M. Saillard. Inverse Obstacle Scattering for Homogeneous Dielectric Cylinders Using a Boundary Finite-Element Method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(3):393–400, March 2000.
- P. Brachet, C. Dedebe, P. Ratajczak, and T. Bousquet. Analyse de structures tridimensionnelles inhomogènes quelconques. In *Proceedings of Journées Internationales de Nice sur les Antennes*, pages 425–438, November 1996.

-
- A. M. Bruaset. *A Survey of Preconditioned Iterative Methods*. Number 328 in Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, Essex, 1995.
- O. M. Bucci, L. Crocco, T. Isernia, and V. Pascazio. Subsurface inverse scattering problems: quantifying, qualifying and achieving the available information. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(11):2527–2538, November 2001.
- N. V. Budko and P. M. van den Berg. Characterization of a Two-Dimensional Subsurface Object With an Effective Scattering Model. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 37(5):2585–2596, September 1999.
- S. Caorsi, G. L. Gragnani, and M. Pastorino. Reconstruction of Dielectric Permittivity Distributions in Arbitrary 2-D Inhomogeneous Biological Bodies by a Multiview Microwave Numerical Method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(2):232–239, June 1993.
- S. Caorsi, G. L. Gragnani, and M. Pastorino. Redundant Electromagnetic Data for Microwave Imaging of Three-Dimensional Dielectric Objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(5):581–589, May 1994.
- S. Caorsi, A. Massa, and M. Pastorino. A Computational Technique Based on a Real-Coded Genetic Algorithm for Microwave Imaging Purposes. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4):1697–1708, July 2000.
- J. Céa. *Optimisation: théorie et algorithmes*. Dunod, Paris, 1971.
- A. Cerboni, P. Brachet, and R. Béhé. Antenna R&D at France Télécom: the CNET Laboratory in La Turbie. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 36(1):7–15, February 1994.
- P. Charbonnier. *Reconstruction d'image: régularisation avec prise en compte des discontinuités*. PhD thesis, Université de Nice – Sophia Antipolis, September 1994.
- W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Series on Electromagnetic Waves. IEEE Press, New York, 1995.
- W. C. Chew and H.-T. Lin. A Frequency-Hopping Approach for Microwave Imaging of Large Inhomogeneous Bodies. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 5(12):439–441, December 1995.

- W. C. Chew and Y.-M. Wang. Reconstruction of Two-Dimensional Permittivity Distribution Using the Distorted Born Iterative Method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(2):218–225, June 1990.
- W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell's Equations with Stretched Coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13):599–604, September 1994.
- L. Chommeloux. *Application de l'imagerie microonde active à la détection d'objets enfouis dans un milieu homogène ou stratifié*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, Paris, February 1987.
- T. F. Coleman, F. Santosa, and A. Verma. Efficient Calculation of Jacobian and Adjoint Vector Products in the Wave Propagational Inverse Problem Using Automatic Differentiation. *Journal of Computational Physics*, 157: 234–255, 2000.
- D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- T. J. Cui and W. C. Chew. Novel Diffraction Tomographic Algorithm for Imaging Two-Dimensional Targets Buried Under a Lossy Earth. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4):2033–2041, July 2000.
- K. R. Demarest, Z. Huang, and R. Plumb. An FDTD Near- To Far-Zone Transformation for Scatterers Buried in Stratified Grounds. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(8):1150–1157, August 1996.
- A. J. Devaney and G. C. Sherman. Nonuniqueness in Inverse Source and Scattering Problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(5):1034–1037, September 1982.
- A. J. Devaney and E. Wolf. Radiating and Nonradiating Classical Current Distributions and the Fields they Generate. *Physical Review D*, 8(4): 1044–1047, 1973.
- O. Dorn, E. L. Miller, and C. M. Rappaport. A Shape Reconstruction Method for Electromagnetic Tomography Using Adjoint Fields and Level Sets. *Inverse Problems*, 16(5):1119–1156, October 2000.
- S. E. Dosso and M. J. Wilmut. Quantifying data information content in geoacoustic inversion. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 27(2):296–304, April 2002.

-
- C. Dourthe. *Tomographie Microonde d'objets enterrés. Application à l'auscultation radar*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, September 1997.
- C. Dourthe, C. Pichot, J.-Y. Dauvignac, L. Blanc-Féraud, and M. Barlaud. Regularized Bi-Conjugate Gradient Algorithm for Tomographic Reconstruction of Buried Objects. *IEICE Transactions on Electronics*, E83-C (12):1858–1863, December 2000a.
- C. Dourthe, C. Pichot, J.-Y. Dauvignac, and J. Cariou. Inversion Algorithm and Measurement System for Microwave Tomography of Buried Object. *Radio Science*, 35(5):1097–1108, September-October 2000b.
- C. Dourthe, C. Pichot, J.-Y. Dauvignac, and J. Cashman. Microwave Imaging of Buried Objects for Ground Radar Tomography. *Radio Science*, 35(3):757–771, May-June 2000c.
- J. Fang and Z. Wu. Closed-Form Expression of Numerical Reflection Coefficient at PML Interfaces and Optimization of PML Performance. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6(9):332–334, September 1996.
- R. Ferrayé. *Développement d'un algorithme de diffraction inverse par déformations eulériennes de courbes de niveaux pour la reconstruction d'images microondes. Application à l'imagerie radar*. PhD thesis, Université de Nice – Sophia Antipolis, March 2002.
- R. Ferrayé, J.-Y. Dauvignac, and C. Pichot. An inverse scattering method based on contour deformations by means of PDE-driven Level Sets using frequency hopping technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(4):1100–1113, April 2003.
- A. Franchois and C. Pichot. Microwave Imaging—Complex Permittivity Reconstruction with a Levenberg-Marquardt Metho. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(2):203–215, February 1997.
- S. D. Gedney. An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(12):1630–1639, December 1996.
- J. R. Gilbert, C. Moler, and R. Schreiber. Sparse matrices in MATLAB: Design and Implementation. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Application*, 13(1):333–356, January 1992.

- E. Guillon. *Étude d'un système d'imagerie microonde multistatique-multifréquence pour la reconstruction d'objets enfouis*. PhD thesis, Université de Nice – Sophia Antipolis, December 2000.
- E. Guillon, J.-Y. Dauvignac, C. Pichot, and J. Cashman. A new design tapered slot antenna for ultrawide-band applications. *Microwave and Optical Technology Letters*, 19(4):286–289, November 1998.
- E. Guillon, E. Le Brusq, I. Aliferis, J.-Y. Dauvignac, and C. Pichot. New Microwave Imaging System for Tomographic Detection and Reconstruction of Buried Objects. In *Progress in Electromagnetic Research Symposium*, July 18-22, 2001. Osaka, Japan.
- T. M. Habashy, R. W. Groom, and B. R. Spies. Beyond the Born and Rytov Approximations: A Nonlinear Approach to Electromagnetic Scattering. *Journal of Geophysical Research*, 98(B2):1759–1775, February 1993.
- T. M. Habashy and M. L. Oristaglio. Simultaneous Nonlinear Reconstruction of Two-Dimensional Permittivity and Conductivity. *Radio Science*, 29(4):1101–1118, July-August 1994.
- J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- T. B. Hansen and P. M. Johansen. Inversion Scheme for Ground Penetrating Radar That Takes into Account the Planar Air-Soil Interface. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(1):496–506, January 2000.
- H. Harada, D. J. N. Wall, T. Takenaka, and M. Tanaka. Conjugate Gradient Method Applied to Inverse Scattering Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8):784–792, August 1995.
- R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Method*. Macmillan, New York, 1968.
- K. Ito, K. Kunisch, and Z. Li. Level-Set Function Approach to an Inverse Interface Problem. *Inverse Problems*, 17(5):1225–1242, October 2001.
- K. Iwata and R. Nagata. Calculation of Refractive Index Distribution from Interferograms Using the Born and Rytov's Approximations. *Japanese Journal of Applied Physics*, 14:1921–1927, 1975.
- J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1975.

-
- N. Joachimowicz, C. Pichot, and J.-P. Hugonin. Inverse Scattering: An Iterative Numerical Method for Electromagnetic Imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(12):1742–1752, December 1991.
- J. S. Juntunen, N. V. Kantartzis, and T. D. Tsiboukis. Zero Reflection Coefficient in Discretized PML. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 11(4):155–157, April 2001.
- N. V. Kantartzis and T. D. Tsiboukis. A Comparative Study of the Bérenger Perfectly Matched Layer, the Superabsorption Technique and Several Higher Order ABC's for the FDTD Algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2p2):1460–1463, March 1997.
- C. Kechribaris. *Development of ultrasonic diffraction tomography methods*. PhD thesis, National Technical University of Athens, December 2001.
- C. Kechribaris, K. S. Nikita, and N. K. Uzunoglu. Reconstruction of two-dimensional distribution using an improved Rytov approximation and non linear optimization. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 17(3):183–208, March 2003.
- R. E. Kleinman and P. M. van den Berg. A Modified Gradient Method for Two-Dimensional Problems in Tomography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 42:17–35, 1992.
- R. E. Kleinman and P. M. van den Berg. An extended range-modified gradient technique for profile inversion. *Radio Science*, 28(5):877–884, September-October 1993.
- R. E. Kleinman and P. M. van den Berg. Two-Dimensional Location and Shape Reconstruction. *Radio Science*, 29(4):1157–1169, July-August 1994.
- E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- M. Lambert, D. Lesselier, and B. J. Kooij. The retrieval of a buried cylindrical obstacle by a constrained modified gradient method in the H-polarization case and for Maxwellian materials. *Inverse Problems*, 14(5):1265–1283, October 1998.
- S. I. Larimore. An approximate minimum degree column ordering algorithm. Master's thesis, Department of Computer and Information Science and Engineering, University of Florida, 1998.

- P. Lobel. *Problèmes de diffraction inverse: reconstruction d'image et optimisation par préservation des discontinuités – Application à l'imagerie microonde*. PhD thesis, Université de Nice – Sophia Antipolis, September 1996.
- P. Lobel, L. Blanc-Féraud, C. Pichot, and M. Barlaud. A new regularization scheme for inverse scattering. *Inverse Problems*, 13(2):403–410, April 1997a.
- P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, and M. Barlaud. Microwave Imaging: Reconstructions from Experimental Data Using Conjugate Gradient and Enhancement by Edge-Preserving Regularization. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 8:337–342, 1997b.
- J. Ma, W. C. Chew, C.-C. Lu, and J. Song. Image Reconstruction from TE Scattering Data Using Equation of Strong Permittivity Fluctuation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(6):860–867, June 2000.
- T. A. Maniatis. *Development of inverse scattering methods for dielectric object imaging*. PhD thesis, National Technical University of Athens, September 1998.
- T. A. Maniatis, K. S. Nikita, and N. K. Uzunoglu. Two-Dimensional Dielectric Profile Reconstruction Based on Spectral-Domain Moment Method and Nonlinear Optimization. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 48(11):1831–1840, November 2000.
- T. Martin. An Improved Near- to Far-Zone Transformation for the Finite-Difference Time-Domain Method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(9):1263–1271, September 1998.
- E. L. Miller, M. E. Kilmer, and C. M. Rappaport. A New Shape-Based Method for Object Localization and Characterization from Scattered Field Data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4):1682–1696, July 2000.
- A. Mitchell, J. T. Aberle, D. M. Kokotoff, and M. W. Austin. An Anisotropic PML for Use with Biaxial Media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47(3):374–377, March 1999.
- R. Mittra and Ü. Pekel. A New Look at the Perfectly Matched Layer (PML) Concept for the Reflectionless Absorption of Electromagnetic Waves. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 5(3):84–86, March 1995.

-
- N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz. *Integral Equation Methods for Electromagnetics*. Artech House Publishers, Boston, 1990.
- J. B. Morris, F. C. Lin, D. A. Pommert, R. V. McGahan, and M. A. Fiddy. A Homomorphic Filtering Method for Imaging Strongly Scattering Penetrable Objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(10): 1029–1035, October 1995.
- R. K. Mueller, M. Kaveh, and G. Wade. Reconstructive Tomography and Applications to Ultrasonics. *Proceedings of the IEEE*, 67:567–587, 1979.
- J. L. Nazareth. A View of Conjugate Gradient-Related Algorithms for Nonlinear Optimization. In L. Adams and J. L. Nazareth, editors, *Linear and Nonlinear Conjugate Gradient-Related Methods*, SIAM Proceedings Series, pages 149–163, Philadelphia, 1996. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- S. J. Norton. Iterative Inverse Scattering Algorithms: Methods for Computing Fréchet Derivatives. *Journal of Acoustical Society of America*, 105(5):2653–2660, November 1999.
- F. J. Paoloni. Implementation of microwave diffraction tomography for measurement of dielectric constant distribution. *IEE Proceedings*, 134(H1): 25–29, February 1987.
- M. Pastorino, A. Massa, and S. Caorsi. A microwave inverse scattering technique for image reconstruction based on a genetic algorithm. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49(3):573–578, June 2000.
- C. Pichot, J.-Y. Dauvignac, C. Dourthe, I. Aliferis, and E. Guillaumont. Inversion Algorithms and Measurement Systems for Microwave Tomography of Buried Objects. In *Proceedings of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, volume 3, pages 1570–1575, May 24–26, 1999. Venice, Italy.
- C. Pichot, L. Jofre, G. Peronnet, and J.-C. Bolomey. Active Microwave Imaging of Inhomogeneous Bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 33(4):416–425, April 1985.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.

- O. M. Ramahi. Near- and Far-Field Calculations in FDTD Simulations Using Kirchhoff Surface Integral Representation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(5):753–759, May 1997.
- C. Ramananjaona, M. Lambert, D. Lesselier, and J.-P. Zolésio. Shape Reconstruction of Buried Obstacles by Controlled Evolution of a Level Set: from a Min-Max Formulation to Numerical Experimentation. *Inverse Problems*, 17(4):1087–1111, August 2001.
- S. Ramo, J. R. Whinnery, and T. V. Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1994.
- P. Ratajczak, P. Brachat, and J.-L. Guiraud. Rigorous analysis of three-dimensional structures incorporating dielectrics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(8):1077–1088, August 1994.
- I. T. Rekanos. On-Line Inverse Scattering of Conductive Cylinders Using Radial-Basis Function Neural Networks. *Microwave and Optical Technology Letters*, 28(6):378–380, 2001.
- I. T. Rekanos and T. D. Tsiboukis. A Finite-Element Based Technique for Microwave Imaging of Two-Dimensional Objects. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49(2):234–239, February 2000.
- I. T. Rekanos, T. V. Yioultsis, and T. D. Tsiboukis. Inverse Scattering Using the Finite-Element Method and a Nonlinear Optimization Technique. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47(3):336–344, March 1999.
- J. H. Richmond. Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 13:334–341, May 1965.
- A. G. Roger. Newton-Kantorovitch Algorithm Applied to an Electromagnetic Inverse Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 29(2):232–238, March 1981.
- A. G. Roger. Reciprocity Theorem Applied to the Computation of Functional Derivatives of the Scattering Matrix. *Electromagnetics*, 2:69–83, 1982.
- A. G. Roger, E. Toro, and D. Maystre. Electromagnetic Remote Sensing in Layered Media. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 24(5):679–684, September 1986.

-
- Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee, and J.-F. Lee. A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(12):1460–1463, December 1995.
- A. Sahin and E. L. Miller. Object Detection Using High Resolution Near-Field Array Processing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(1):136–141, January 2001.
- T. Sato, T. Wakayama, and K. Takemura. An Imaging Algorithm of Objects Embedded in a Lossy-Dispersive Medium for Subsurface Radar-Data Processing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(1):296–303, January 2000.
- S. A. Schelkunoff. Some Equivalence Theorems of Electromagnetics and Their Application to Radiation Problems. *Bell System Technical Journal*, 15:92–112, 1936.
- M. Slaney, A. C. Kak, and L. E. Larsen. Limitations of Imaging with First-Order Diffraction Tomography. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 32(8):860–873, August 1984.
- L. Souriau, B. Duchêne, D. Lesselier, and R. E. Kleinman. Modified Gradient Approach to Inverse Scattering for Binary Objects in Stratified Media. *Inverse Problems*, 12(4):463–481, August 1996.
- W. Tabbara, B. Duchêne, C. Pichot, D. Lesselier, L. Chommeloux, and N. Joachimowicz. Diffraction Tomography: Contribution to the Analysis of Some Applications in Microwaves and Ultrasonics. *Inverse Problems*, 4(2):305–331, May 1988.
- A. Taflove. *Computational Electromagnetics: the Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House Publishers, Boston, 1995.
- A. Taflove. *Advances in Computational Electromagnetics: the Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House Publishers, Boston, 1998.
- A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston, Washington, DC, 1977.
- J. F. Traub. A Continuous Model of Computation. *Physics Today*, pages 39–43, May 1999.

- P. M. van den Berg, M. G. Coté, and R. E. Kleinman. "Blind" Shape Reconstruction from Experimental Data. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(12):1389–1396, December 1995.
- P. M. van den Berg and R. E. Kleinman. A Total Variation Enhanced Modified Gradient Algorithm for Profile Reconstruction. *Inverse Problems*, 11(3):L5–L10, June 1995.
- Y.-M. Wang and W. C. Chew. An Iterative Solution of Two-Dimensional Electromagnetic Scattering Problem. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 1:100–108, 1989.
- Y.-M. Wang and X. Gong. A Neural Network Approach to Microwave Imaging. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 11(3):159–163, November 2000.
- S. C. Winton and C. M. Rappaport. Specifying PML Conductivities by Considering Numerical Reflection Dependencies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(7):1055–1063, July 2000.
- E. Wolf. Three-Dimensional Structure Determination of Semi-Transparent Objects from Holographic Data. *Optics Communications*, 1:153–156, 1969.
- Z. Wu and J. Fang. High-Performance PML Algorithms. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6(9):335–337, September 1996.
- K. S. Yee. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3):302–307, May 1966.
- L. Zhao and A. C. Cangellaris. GT-PML: Generalized Theory of Perfectly Matched Layers and its Application to the Reflectionless Truncation of Finite-Difference Time-Domain Grids. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 44(12):2555–2563, December 1996.

Ευρετήριο βιβλιογραφίας

- Adams and Anderson (1982), 3
Aliferis et al. (2000a), 32
Aliferis et al. (2000b), 20
Aliferis et al. (2000c), 7
Balanis (1989), 65
Balanis (1997), 90
Baribaud et al. (1982), 3
Beilenhoff and Heinrich (1992), 9
Belkebir et al. (1997), 6
Bloemenkamp and
 van den Berg (2000), 6
Bolomey and Pichot (1991), 4
Bolomey et al. (1982), 3
Bonnard et al. (1998), 7
Bonnard et al. (2000), 7
Brachat et al. (1996), 32
Bruaset (1995), 9, 105
Bucci et al. (2001), 109
Budko and van den Berg (1999), 7
Bérenger (1994), 83
Bérenger (1996), 83, 87
Caorsi et al. (1993), 5
Caorsi et al. (1994), 5
Caorsi et al. (2000), 7
Cerboni et al. (1994), 32
Charbonnier (1994), 27
Chew and Lin (1995), 3, 52
Chew and Wang (1990), 5
Chew and Weedon (1994), 83
Chew (1995), 3, 78
Chommeloux (1987), 18
Coleman et al. (2000), 7
Colton and Kress (1992), 2
Cui and Chew (2000), 4
Céa (1971), 7
Demarest et al. (1996), 89
Devaney and Sherman (1982), 2
Devaney and Wolf (1973), 2
Dorn et al. (2000), 7
Dosso and Wilmut (2002), 109
Dourthe et al. (2000a), 13
Dourthe et al. (2000b), 7
Dourthe et al. (2000c), 7
Dourthe (1997), 8, 13, 18, 22, 24, 26,
 27, 29, 107
Fang and Wu (1996), 83
Ferrayé et al. (2003), 7
Ferrayé (2002), 52
Franchois and Pichot (1997), 5
Gedney (1996), 83
Gilbert et al. (1992), 110
Guillanton et al. (1998), 32
Guillanton et al. (2001), 32, 55
Guillanton (2000), 109
Habashy and Oristaglio (1994), 2, 6
Habashy et al. (1993), 4
Hadamard (1923), 2
Hansen and Johansen (2000), 4
Harada et al. (1995), 7
Harrington (1968), 16

- Ito et al. (2001), 7
Iwata and Nagata (1975), 3
Jackson (1975), 89
Joachimowicz et al. (1991), 5
Juntunen et al. (2001), 83
Kantartzis and Tsiboukis (1997), 83
Kechribaris et al. (2003), 5
Kechribaris (2001), 5
Kleinman and
 van den Berg (1992), 6
Kleinman and
 van den Berg (1993), 6
Kleinman and
 van den Berg (1994), 6
Kreyszig (1978), 97
Lambert et al. (1998), 6
Larimore (1998), 105
Lobel et al. (1997a), 7, 8, 24
Lobel et al. (1997b), 7, 8
Lobel (1996), 24, 108
Ma et al. (2000), 7
Maniatis et al. (2000), 6
Maniatis (1998), 6
Martin (1998), 89
Miller et al. (2000), 7
Mitchell et al. (1999), 84
Mittra and Pekel (1995), 83
Morita et al. (1990), 66
Morris et al. (1995), 7
Mueller et al. (1979), 3
Nazareth (1996), 7
Norton (1999), 7
Paoloni (1987), 4
Pastorino et al. (2000), 7
Pichot et al. (1985), 4
Pichot et al. (1999), 32
Press et al. (1992), 149
Ramahi (1997), 89
Ramananjaona et al. (2001), 7
Ramo et al. (1994), 98, 100
Ratajczak et al. (1994), 32
Rekanos and Tsiboukis (2000), 7
Rekanos et al. (1999), 7
Rekanos (2001), 7
Richmond (1965), 5
Roger et al. (1986), 7
Roger (1981), 5
Roger (1982), 7
Saad (1996), 9, 103
Sacks et al. (1995), 83
Sahin and Miller (2001), 7
Sato et al. (2000), 7
Schelkunoff (1936), 89
Slaney et al. (1984), 3, 4
Souriau et al. (1996), 6
Tabbara et al. (1988), 4
Taflove (1995), 83
Taflove (1998), 83
Tikhonov and Arsenin (1977), 8
Traub (1999), 3
Wang and Chew (1989), 5
Wang and Gong (2000), 7
Winton and Rappaport (2000), 83
Wolf (1969), 3
Wu and Fang (1996), 83, 86, 87
Yee (1966), 9, 71
Zhao and Cangellaris (1996), 83–85
van den Berg and
 Kleinman (1995), 6
van den Berg et al. (1995), 6

Microwave imaging of buried objects: two-dimensional numerical modeling and study of the three-dimensional extension

In the first part of this Ph.D. thesis, we study a method of quantitative reconstruction of permittivity and conductivity profiles, based on a bigradient conjugate method and an edge-preserving regularization technique. The associated forward problem is solved by the Method of Moments, for the case of a transverse-magnetic polarization of the incident field. This method, previously developed for the case of plane-wave illumination, is enhanced in order to take into account the near-field of the emitting antennas and the measurement noise. We examine the robustness of the algorithm by simulating the errors in the measurement of the diffracted field. The choice of various configuration parameters is studied, in order to obtain the necessary information for optimal reconstructions. In a second part, we develop a finite-difference frequency-domain method for the solution of Maxwell's equations in two and three dimensions. The grid is terminated by perfectly matched layers and the Kirchhoff integral is applied to the near- to far-field transformation. A matrix formulation for the direct scattering problem is thus obtained, with an explicit dependence on the electromagnetic properties of the computational domain. This makes the method suitable for integration in a microwave imaging algorithm. Numerical results validate the finite-difference frequency-domain method.

Keywords: electromagnetics, inverse scattering, microwave tomography, numerical methods, finite difference, frequency domain.

Μικροκυματική Απεικόνιση Αντικειμένων στο Εσωτερικό Δομών:
Δισδιάστατη Αριθμητική Μοντελοποίηση και
Μελέτη Επέκτασης στις Τρεις Διαστάσεις

Στο πρώτο μέρος τής διατριβής, εξετάζεται μια μέθοδος ποσοτικής ανακατασκευής προφίλ ηλεκτρικής επιδεκτικότητας και αγωγιμότητας, βασισμένη σε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης δισυζυγών κλίσεων και σε μια τεχνική κανονικοποίησης με διατήρηση ασυνεχειών. Το ευθύ πρόβλημα επιλύεται με τη Μέθοδο των Ροπών, θεωρώντας πόλωση εγκάρσια μαγνητική για το προσπίπτον πεδίο. Αυτή η μέθοδος, η οποία έχει αναπτυχθεί παλαιότερα για την περίπτωση επί-πεδου προσπίπτοντος κύματος, επεκτείνεται εδώ ώστε να λαμβάνει υπόψη το κοντινό πεδίο των κεραιών εκπομπής καθώς επίσης και το θόρυβο μέτρησης. Μελετάμε την αντοχή του αλγορίθμου προσομοιώνοντας τα σφάλματα μέτρησης του σχεδάζομενου πεδίου. Η επιλογή των διαφόρων παραμέτρων τής μεθόδου εξετάζεται έτσι ώστε ο αλγόριθμος ανακατασκευής να λαμβάνει την απαραίτητη πληροφορία για βέλτιστες ανακατασκευές. Στο δεύτερο μέρος, αναπτύσσουμε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων του Maxwell στο πεδίο των συχνοτήτων, σε δύο και τρεις διαστάσεις. Για τον τερματισμό του πλέγματος χρησιμοποιούνται τέλεια προσαρμοσμένα στρώματα, ενώ αναπτύσσεται ένας μετασχηματισμός κοντινού σε μακρινό πεδίο, βασισμένος στο ολοκλήρωμα Kirchhoff. Το ευθύ πρόβλημα διατυπώνεται με τη βοήθεια μιας εξίσωσης πινάκων, με εκπεφρασμένη εξάρτηση από τις ηλεκτρομαγνητικές παραμέτρους του υπολογιστικού χώρου. Αυτό κάνει τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο των συχνοτήτων κατάλληλη για ενσωμάτωση σε έναν αλγόριθμο μικροκυματικής απεικόνισης. Η εγκυρότητα τής μεθόδου επιβεβαιώνεται με αριθμητικά αποτελέσματα.

Λέξεις-κλειδιά: ηλεκτρομαγνητισμός, αντίστροφη σκέδαση, μικροκυματική τομογραφία, αριθμητικές μέθοδοι, πεπερασμένες διαφορές, πεδίο συχνοτήτων.

Printing instructions

- Print double-sided on A4 paper.
- Cut all the sheets along this line.